

Geometria analityczna

Paweł Mleczo

Teoria

Informacja 1 (o prostej).

— postać ogólna prostej: $Ax + By + C = 0$, $A^2 + B^2 \neq 0$,

— postać kanoniczna (kierunkowa) prostej: $y = ax + b$.

Współczynnik a nazywamy współczynnikiem kierunkowym prostej.

Twierdzenie 2 (o prostych równoległych i prostopadłych).

— Dwie proste są równoległe wtedy i tylko wtedy, gdy mają takie same współczynniki kierunkowe. warunek równoległości

— Dwie proste są prostopadłe wtedy i tylko wtedy, gdy iloczyn ich współczynników kierunkowych wynosi -1 .

Twierdzenie 3 (odległość punktu od prostej). Odległość d punktu (x_0, y_0) od prostej $Ax + By + C = 0$ ($A^2 + B^2 \neq 0$) wynosi

$$d = \frac{|A \cdot x_0 + B \cdot y_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Definicja 1 (równanie okręgu). Okręgiem o środku w punkcie (x_0, y_0) i promieniu r , $r > 0$, nazywamy zbiór punktów (x, y) spełniających równanie

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2.$$

Równanie to nazywane jest postacią kanoniczną.

Zadania na zajęcia

Zadanie 1. Narysować zbiór $A = \{(x, x - 1) : x \in \mathbb{R}\}$. Jak można nazwać zbiór A ? W jaki inny sposób można go opisać?

Zadanie 2. Wyznaczyć równanie prostej przechodzącej przez punkty $(1, 5)$ oraz $(-2, 1)$.

Zadanie 3. Wyznaczyć prostą równoległą do prostej $2x + \frac{1}{2}y - 8 = 0$ i przechodzącą przez punkt $(1, 3)$.

Zadanie 4. Wyznaczyć prostą prostopadłą do prostej $y = -\frac{1}{2}x + 3$ i przechodzącą przez punkt $(0, 0)$.

Zadanie 5. Czy proste $x + y + 1 = 0$ oraz $y = -x + 5$ są równoległe?

Zadanie 6. Narysować w układzie współrzędnych okrąg dany równaniem

$$x^2 + y^2 + 2x - 6y + 4 = 0.$$

Zadanie 7. Znaleźć styczne do okręgu $x^2 + y^2 = 9$ przechodzące przez punkt $(4, 0)$.

Zadanie 8. Znaleźć styczne do okręgu $x^2 + y^2 + 4x - 8y + 12 = 0$ i równoległe do prostej $x + y + 1 = 0$.

Zadanie 9. Ile punktów wspólnych z okręgiem $x^2 + y^2 - 2x + 2y = 0$ ma prosta $y = x + 3$?

Zadanie 10. Wyznaczyć liczbę punktów wspólnych okręgu o równaniu $x^2 + y^2 + 2x - 6y + 4 = 0$ z prostą o równaniu $y - x - m = 0$ w zależności od parametru m .

Zadanie 11. Czy okręgi $x^2 + y^2 + 2x + 8y + 16 = 0$ oraz $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 8 = 0$ mają punkty wspólne?

Zadanie 12. Wyznaczyć równanie okręgu stycznego do dwóch prostych o równaniach $x + y - 2 = 0$ oraz $x + y + 3 = 0$ i przechodzącego przez punkt $(1, 0)$.

Zadanie 13. Punkty $A = (-1, -2)$, $B = (2, 1)$ oraz $C = (-4, -3)$ są wierzchołkami trójkąta ABC . Obliczyć pole tego trójkąta.

Zadanie 14. Wierzchołki rombu $ABCD$ znajdują się w punktach $A = (-1, 0)$, $B = (3, -1)$ oraz $D = (-2, 4)$. Znajdź współrzędne wierzchołka C oraz oblicz pole rombu P .

Zadanie 15. Na prostej o równaniu $y = 5$ w taki sposób wyznaczyć punkt B , aby łamana ABC , gdzie $A = (2, 3)$, $C = (5, 4)$, miała jak najmniejszą długość?

Zadanie 16. Wyznaczyć pole trójkąta o wierzchołkach $(0, x)$, $(x, 3)$ oraz $(1, 3)$ jako funkcję f zmiennej x , $x \in \mathbb{R}$ i naszkicować jej wykres. Wyznaczyć liczbę rozwiązań równania $f(|x|) = m$ w zależności od wartości parametru m , $m \in \mathbb{R}$.

Zadania domowe

Zadanie 17. Wyprowadzić wzór na prostą przechodzącą przez punkty (x_1, y_1) oraz (x_2, y_2) .

Zadanie 18. Znaleźć równanie okręgu o środku w punkcie $S = (1, 3)$, jeśli dodatkowo wiadomo, że punkt $(2, -1)$ należy do tego okręgu.

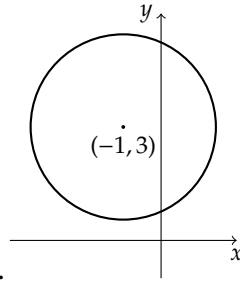
Zadanie 19. Okrąg, do którego środek należy do osi OY a promień ma długość $r = \sqrt{5}$ jest styczny do prostej o równaniu $x + 2y - 1 = 0$. Napisz równanie tego okręgu.

Zadanie 20. Czy prosta $y = 2x + 3$ ma punkt wspólny z okręgiem $x^2 + y^2 + 4x + 4y + 4 = 0$?

Zadanie 21. Wyznacz równanie okręgu opisanego na trójkącie ABC , gdzie $A = (-2, 1)$, $B = (0, -3)$ i $C = (4, 3)$.

Zadanie 22. Okrąg o równaniu $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 4$ jest opisany na pewnym trójkącie równobocznym. Znajdź równanie okręgu wpisanego w ten trójkąt.

Odpowiedzi



2. $y = \frac{4}{3}x + 3\frac{2}{3}$ 3. $y = -4x + 7$ 4. $y = 2x$ 5. Tak. 6.
 lub $y = -\frac{3\sqrt{7}}{7}x + \frac{12\sqrt{7}}{7}$ 8. $y = -x - 2$ lub $y = -x + 6$ 9. Prosta nie ma punktów wspólnych z okręgiem.
 10. Dla $m \in (4 - 2\sqrt{3}, 4 + 2\sqrt{3})$ są dwa wspólne punkty, dla $m = 4 + 2\sqrt{3}$ lub $m = 4 - \sqrt{3}$ jest jeden punkt
 wspólny (prosta jest styczną), dla $m \in (-\infty, 4 - 2\sqrt{3}) \cup ((4 + 2\sqrt{3}), \infty)$ nie ma punktów wspólnych. 11. Brak
 punktów wspólnych. 12. $(x + \frac{3}{4})^2 + (y - \frac{1}{4})^2 = \frac{25}{4}$ lub $(x - \frac{5}{4})^2 + (y + \frac{7}{4})^2 = \frac{25}{4}$ 13. $P = 3$ 14. $C = (2, 3)$,
 $P = 15$ 15. $B = (4, 5)$ 16. Ilość rozwiązań w zależności od m : $0 - m \in (-\infty, 0)$, $4 - (\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$, $8 - m \in (0, \frac{1}{2})$, $6 -$
 $m = \frac{1}{2}$, $3 - m = \frac{3}{2}$ $2 - m \in (\frac{3}{2}, \infty)$. 17. $y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) + y_1$ 18. $(x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 17$. 19. $(x - 6)^2 + y^2 = 5$
 lub $(x + 4)^2 + y^2 = 5$. 20. Tak. 21. $(x + \frac{8}{7})^2 + (y - \frac{3}{7})^2 = \frac{52}{49}$. 22. $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 1$.