Spis treści

1 Elementy logiki

Zadanie 1.1. *Niech p, q, r będą zmiennymi zdaniowymi takimi, że:*

p: Pada deszcz. *q: Świeci słońce.* *r: Na niebie są chmury.*

A. *Zapisz schematy zdań:*

a) Pada deszcz i świeci słońce.
b) Jeśli pada deszcz, to na niebie są chmury.
c) Świeci słońce lub na niebie są chmury wtedy i tylko wtedy, gdy nie pada deszcz.

B. *Odczytaj schematy zdań:*

a) $(p \wedge q) \Rightarrow r$ *b)* $(p \Rightarrow r) \Rightarrow q$ *c)* $\neg\, q \Leftrightarrow (p \vee r)$

Zadanie 1.2. *Sprawdź metodą zero-jedynkową, czy formuły są tautologiami rachunku zdań:*

a) $[p \Rightarrow (\neg\, p \wedge q)] \Rightarrow q$

b) $[(p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)] \Leftrightarrow [(p \vee q) \Rightarrow r]$

c) $[(p \Leftrightarrow q) \wedge (q \Leftrightarrow r)] \Rightarrow (p \Leftrightarrow r)$

d) $\{\neg\, [(p \vee q) \wedge r] \Rightarrow \neg\, q\} \Leftrightarrow [\neg\, p \wedge (r \Rightarrow q)]$

Zadanie 1.3. *Uprość formuły korzystając z praw rachunku zdań:*

a) $[\neg\, (\neg\, p \wedge \neg\, q) \vee (p \Rightarrow q)] \wedge p$

b) $p \Rightarrow [q \wedge (\neg\, p \Leftrightarrow q)]$

c) $p \wedge [q \vee (\neg\, p \wedge r)]$

d) $p \Leftrightarrow [q \Rightarrow (q \Rightarrow p)]$

Zadanie 1.4. *Pokaż, że formuły A i B są równoważne tzn. $A \sim B$, jeżeli:*

a) $A = (p \wedge q) \Rightarrow r$, $B = (p \wedge \neg\, r) \Rightarrow \neg\, q$

b) $A = (p \wedge r) \Rightarrow (q \wedge r)$, $B = (p \wedge r) \Rightarrow q$

c) $A = p \vee (p \wedge q)$, $B = p$

d) $A = (p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r)$, $B = p \Rightarrow (q \wedge r)$

Zadanie 1.5. *Sprawdź, czy prawdziwe są zdania:*

a) Jeżeli nie jest prawdą, że albo prosta l jest równoległa do prostej m albo prosta p nie jest równoległa do prostej m, to albo prosta l nie jest równoległa do prostej m, albo prosta p jest równoległa do prostej m.

b) Jeżeli Iksiński nie zna rachunku zdań, to, jeżeli Iksiński zna rachunek zdań, to Iksiński żyje na Marsie.

c) $[(2+2=5) \wedge (7 \mid 324)] \Leftrightarrow \left[\left(5^{0,5}\right)^3 + \sqrt{125} = (0,002)^{-\frac{1}{2}}\right]$

d) $\neg\, (0 \neq 1) \Rightarrow \left\{\left[x^3 + 3x^2 - 4x \leqslant 0 \text{ } dla\ x \in (-\infty; -4\rangle \cup \langle 0; 1)\right] \vee \left[\left(2x^3 + 2x^2 - 5x - 4\right) \div \left(2x^2 - 3\right) = x + 1\right]\right\}$

Zadanie 1.6. *Zbuduj prawdziwą implikację ze zdań:*

t: Liczba naturalna n jest podzielna przez 2.

r: Liczba naturalna n jest podzielna przez 4.

Określ, które ze zdań jest warunkiem koniecznym, które wystarczającym.

Zadanie 1.7. *Odczytaj zdania:*

a) $\forall_{l_1, l_2, l_3 \in \pi} \{[(l_1 \parallel l_3) \wedge (l_2 \parallel l_3)] \Rightarrow (l_1 \parallel l_2)\}$

b) $\forall_{l_1, l_2, l_3 \in \pi} \{[(l_1 \perp l_2) \wedge (l_2 \perp l_3)] \Rightarrow (l_1 \parallel l_3)\}$

c) $\forall_{x \in \mathbb{R}} \forall_{\epsilon > 0} \exists_{\delta > 0} \forall_{y \in \mathbb{R}} \left(|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon\right)$

d) $\forall_{n \in \mathbb{N}_+} a_n < 0$

Zadanie 1.8. *Zapisz przy pomocy kwantyfikatorów zdania:*

a) Twierdzenie Lagrange'a: Każda liczba naturalna jest sumą kwadratów czterech liczb naturalnych.

b) Między dowolnymi dwiema liczbami rzeczywistymi znajduje się trzecia liczba rzeczywista.

c) Suma kwadratów dwóch dowolnych liczb rzeczywistych jest nieujemna.

d) Warunek Lipschitza: Istnieje liczba $L > 0$ *taka, że dla każdych liczb* x_1, x_2 *należących do przedziału* I *spełniona jest nierówność* $|f(x_1) - f(x_2)| \leqslant L|x_1 - x_2|$.

Zadanie 1.9. *Sprawdź, czy prawdziwe są zdania:*

a) $\forall_{t\in\mathbb{R}} \left(t^2 + 2t - 3 = 0\right)$

b) $\exists_{n\in\mathbb{N}} \left(2n^2 - n - 10 = 0\right)$

c) $\forall_{\alpha} (tg\alpha \cdot ctg\alpha = 1)$

d) $\forall_{\alpha} \left(sin^2\alpha + cos^2\alpha = 1\right)$

e) $\exists_{n\in\mathbb{N}} [(n + 7 \geqslant 5) \wedge (n < 4 - n)]$

f) $\exists_{n\in\mathbb{N}} \left[(n - 5 > 12) \wedge \left(n^4 + n < n^4 + 8\right)\right]$

g) $\forall_{x\in\mathbb{R}} \forall_{y\in\mathbb{R}} \left(y = x^2\right)$

h) $\forall_{y\in\mathbb{R}} \exists_{x\in\mathbb{R}} \left(x^2 = y\right)$

Zadanie 1.10. *Znajdź zaprzeczenia formuł:*

a) $\forall_x [f(x) \Rightarrow \exists_y\, g(y)]$

b) $\forall_x [f(x) \Rightarrow g(x)] \wedge \exists_x [h(x) \wedge \neg\, k(x)]$

Wskazówki i odpowiedzi

Odp 1.1.

A. a) $p \wedge q$ *b)* $p \Rightarrow r$ *c)* $q \vee r \Leftrightarrow \neg p$

B. a) Jeśli pada deszcz i świeci słońce, to na niebie są chmury.

B. b) Jeśli z tego, że pada deszcz wynika, że na niebie są chmury, to świeci słońce.

B. c) Słońce nie świeci wtedy i tylko wtedy, gdy pada deszcz lub na niebie są chmury.

Odp 1.2.

a,d) Formuła nie jest tautologią rachunku zdań.

b,c) Formuła jest tautologią rachunku zdań.

Odp 1.3. *Podane formuły można uprościć do postaci:*

a) p *b)* $\neg p$ *c)* $p \wedge q$ *d)* $q \vee p$

Odp 1.4. *Sposoby postępowania: Należy przekształcić za pomocą praw rachunku zdań jedną formułę do postaci drugiej formuły albo pokazać, że dla każdego wartościowania* p, q, r *obydwie formuły przyjmują te same wartości logiczne.*

Odp 1.5. *a, b, d) zdania prawdziwe, natomiast c) fałszywe.*

Odp 1.6. *Implikacja:* $r \Rightarrow t$*, gdzie zdanie* r *jest warunkiem wystarczającym dla zdania* t*, a zdanie* t *warunkiem koniecznym dla zdania* r*.*

Odp 1.7.

a) Dla dowolnych trzech prostych na płaszczyźnie, jeśli pierwsza jest równoległa do trzeciej i druga jest równoległa do trzeciej, to pierwsza jest równoległa do drugiej.

b) Dla dowolnych trzech prostych na płaszczyżnie, jeśli pierwsza jest prostopadła do drugiej i druga jest prostopadła do trzeciej, to pierwsza jest równoległa do trzeciej.

c) Dla dowolnej liczby rzeczywistej x *i dowolnej dodatniej liczby rzeczywistej* ϵ *istnieje dodatnia liczba rzeczywista* δ*, że dla każdej liczby rzeczywistej* y *zachodzi warunek, że jeśli* $|x-y|<\delta$*, to* $|f(x)-f(y)|<\epsilon$*.*

d) Wszystkie wyrazy ciągu liczbowego są ujemne.

Odp 1.8.

a) $\forall_{n\in\mathbb{N}}\exists_{a,b,c,d\in\mathbb{N}}\left(n=a^2+b^2+c^2+d^2\right)$

b) $\forall_{x\in\mathbb{R}}\forall_{y\in\mathbb{R}}\exists_{z\in\mathbb{R}}\left(x<y\Rightarrow x<z<y\right)$

c) $\forall_{a,b\in\mathbb{R}}\left(a^2+b^2\geqslant 0\right)$

d) $\exists_{L>0}\forall_{x_1,x_2\in I}\left(|f(x_1)-f(x_2)|\leqslant L\,|x_1-x_2|\right)$

Odp 1.9. *d, e) zdania prawdziwe, natomiast a, b, c, f, g, h) fałaszywe.*

Odp 1.10.

a) $\exists_x\left[f(x)\wedge\forall_y\neg g(y)\right]$

b) $\exists_x[f(x)\wedge\neg g(x)]\vee\forall_x[\neg h(x)\vee k(x)]$

2 Elementy teorii mnogości

Zadanie 2.1. *Naszkicuj na osi liczbowej lub w układzie współrzędnych zbiory $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, $A \triangle B$, jeżeli:*

a) $A = \left\{x \in \mathbb{R} : x^2 > 4\right\}, B = \{x \in \mathbb{R} : x < 1\}$

b) $A = \{x \in \mathbb{R} : |x| < 4\}, B = \{x \in \mathbb{R} : x \geqslant 4\}$

c) $A = \{x \in \mathbb{R} : |x| > 3\}, B = \{x \in \mathbb{R} : |x| \leqslant 1\}$

d) $A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = |x|\right\}, B = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 4\right\}$

e) $A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y - x \leqslant 0\right\}, B = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x + y < 3\right\}$

f) $A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = |2x+1| - 1\right\}, B = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \leqslant -x^2 + 1\right\}$

Zadanie 2.2. *Korzystając z definicji działań na zbiorach wykaż, że dla dowolnych zbiorów A, B, C zachodzą następujące równości:*

a) $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$

b) $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$

c) $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$

d) $[(A \cup B) \setminus C] \cup (A \cap C) = A \cup (B \setminus C)$

Zadanie 2.3. *Udowodnij za pomocą praw rachunku zbiorów, że dla dowolnych zbiorów A, B, C zachodzą następujące równości:*

a) $A \triangle B = B \triangle A$

b) $A \cap (B \triangle C) = (A \cap B) \triangle (A \cap C)$

c) $A \setminus (A \triangle B) = A \cap B$

d) $(A \cup B) \triangle (A \cap B) = A \triangle B$

Zadanie 2.4. *Sprawdź, czy prawdą jest, że:*

a) $A \cup B = B \Leftrightarrow A \subset B$

b) $(A \setminus B) \cup (C \setminus D) \subset (A \cup C) \setminus (B \cup D)$

c) $A \subset B \Leftrightarrow A \cup (B \setminus A) = B$

d) $A \subset B \wedge C \subset D \Rightarrow (A \cup C) \subset (B \cup D)$

Zadanie 2.5. *Znajdź zbiór $\mathcal{P}(A)$, gdzie:*

a) $A = \varnothing$ *b)* $A = \{4\}$ *c)* $A = \{1, 2\}$ *d)* $A = \{a, b, c\}$

Zadanie 2.6. *Znajdź $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ oraz $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$, jeżeli:*

a) $A_n = \{x \in \mathbb{R} : x < n\}$

b) $A_n = \left\{x \in \mathbb{R} : 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{n}\right\}$

c) $A_n = \left\{x \in \mathbb{R} : 1 + \frac{1}{n} < x \leqslant 3 + \frac{1}{n}\right\}$

d) $A_n = \left\{x \in \mathbb{R} : -\frac{1}{2}n \leqslant x \leqslant \frac{1}{4}n\right\}$

Zadanie 2.7. *Znajdź* $\bigcup_{t\in\mathbb{R}} A_t$ *oraz* $\bigcap_{t\in\mathbb{R}} A_t$*, jeżeli:*

a) $A_t = \left\{x \in \mathbb{R} : |x-2| \leqslant t^2\right\}$ *b)* $A_t = \left\{x \in \mathbb{R} : |x-2| > t^2\right\}$

c) $A_t = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leqslant t^2\right\}$ *d)* $A_t = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x + t = y\right\}$

Zadanie 2.8. *Podaj interpretację graficzną* $A \times B$ *oraz* $B \times A$*, jeżeli:*

a) $A = \{3,4,5\}, B = \{2,3\}$

b) $A = \{a \in \mathbb{Z} : |a| \leqslant 5\}, B = \{b \in \mathbb{R} : 1 < b \leqslant 2\}$

c) $A = \{a \in \mathbb{R} : -1 < a \leqslant 7\}, B = \{b \in \mathbb{R} : 0 \leqslant b < 5\}$

d) $A = \{a \in \mathbb{R} : 0 < a < 1 \vee 2 < a \leqslant 3\}, B = \{b \in \mathbb{R} : 1 < b \leqslant 2 \vee 3 < b \leqslant 4\}$

e) $A = \{a \in \mathbb{R} : -4 \leqslant a < -2 \vee 2 < a \leqslant 4\}, B = \{b \in \mathbb{Z} : -4 < b \leqslant 3\}$

f) $A = \{a \in \mathbb{R} : -1 < a < 0 \vee 0 < a < 1\}, B = \{b \in \mathbb{Z} : |b| \leqslant 2\}$

Zadanie 2.9. *Korzystając z definicji iloczynu kartezjańskiego zbiorów wykaż, że dla dowolnych zbiorów* A, B, C *zachodzą następujące równości:*

a) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$

b) $A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C)$

c) $(A \cap B) \times (C \cap D) = (A \times C) \cap (B \times D)$

d) $(A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C)$

Zadanie 2.10. *Znajdź* $D_l(\mathcal{R})$ *oraz* $D_p(\mathcal{R})$*:*

a) $\mathcal{R} = \{(1,2), (1,4), (2,2), (3,4), (3,5)\}$

b) $\mathcal{R} = \{(-1,1), (0,1), (1,1)\}$

c) $X = \{-1,0,1\}, Y = \{-2,-1,0,1,2\}, \quad x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x < y$

d) $X = Y = \mathbb{N}, \quad x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x < y$

e) $X = \{4,5\}, Y = \mathbb{N}, \quad x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x \mid y$

f) $X = \mathbb{N}, Y = \{12,18\}, \quad x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x \mid y$

g) $X = Y = \mathbb{R}, \quad x\mathcal{R}y \Leftrightarrow y = |x| + 1$

h) $X = Y = \mathbb{R}, \quad x\mathcal{R}y \Leftrightarrow y = -x^2 - 5$

Zadanie 2.11. *Niech* $X = \{a,b,c,d\}$*. Sprawdź, jakie z własności: zwrotności, symetryczności, antysymetryczności, przechodniości, spójności mają następujące relacje* $\mathcal{R}_i \subset X \times X$*:*

a) $\mathcal{R}_1 = \{(a,a), (b,b), (a,b)\}$

b) $\mathcal{R}_2 = \{(a,a), (b,b), (c,c), (d,d), (a,b), (b,a)\}$

c) $\mathcal{R}_3 = \{(a,b), (b,a), (c,a), (a,c), (c,d), (a,d)\}$

Zadanie 2.12. *Określ, które z następujących relacji są: zwrotne, symetryczne, antysymetryczne, przechodnie, spójne. Jeśli któraś z relacji jest równoważnością, to wyznacz klasy abstrakcji.*

a) $\mathcal{R} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \quad x\mathcal{R}y \Leftrightarrow xy = 0$

b) $\mathcal{R} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \quad x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x + y = 2$

c) $\mathcal{R} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \quad x\mathcal{R}y \Leftrightarrow |x| = |y|$

d) $\mathcal{R} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \quad x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x^2 = y^2$

e) $\mathcal{R} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \quad x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x \leqslant y$

f) $\mathcal{R} \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, \quad x\mathcal{R}y \Leftrightarrow 3 \mid x - y$

g) $\mathcal{R} \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, \quad x\mathcal{R}y \Leftrightarrow 5 \mid x + 2y$

h) $\mathcal{R} \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}, \quad x\mathcal{R}y \Leftrightarrow (x = 1 \wedge y = 1)$

i) $\mathcal{R} \subset X \times X,\ X = \{1, 2, 3, 4, \ldots, 16\}, \quad x\mathcal{R}y \Leftrightarrow 4 \mid x^2 - y^2$

Zadanie 2.13. *Sprawdź, czy następujące relacje są funkcjami. Jeśli tak, określ dziedzinę, przeciwdziedzinę oraz zbiór wartości funkcji.*

a) $\mathcal{R} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \quad x\mathcal{R}y \Leftrightarrow 2x + y = 4$

b) $\mathcal{R} \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{N}, \quad x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x = y$

c) $\mathcal{R} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \quad x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x^2 = y^2$

d) $\mathcal{R} \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}, \quad x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x \leqslant y$

e) $\mathcal{R} \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, \quad x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x = -1$

f) $\mathcal{R} \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}, \quad x\mathcal{R}y \Leftrightarrow 5 \mid x + y$

g) $\mathcal{R} \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}, \quad x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x^3 = y^3$

h) $\mathcal{R} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \quad x\mathcal{R}y \Leftrightarrow y = |-x + 2| - 4$

Zadanie 2.14. *Czy dla funkcji f istnieje funkcja odwrotna f^{-1}? Uzasadnij odpowiedź. Jeśli tak, wyznacz ją.*

a) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = -4x + 5$

b) $f\colon \mathbb{R} \to \langle 0, \infty), \quad f(x) = x^2$

c) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = 3^x + 4$

d) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} \frac{x}{x-1} & , x \neq 1 \\ 1 & , x = 1 \end{cases}$

e) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} -x^2 & , x < 0 \\ x & , x \in \langle 0, 1) \\ 2x - 1 & , x \geqslant 1 \end{cases}$

f) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = (x + 2y, -3x + 6)$

g) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \times \langle 0, \infty), \quad f(x, y) = \left(x, y^2\right)$

h) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = (|x|, x + y)$

Zadanie 2.15. *Dla danych funkcji f, g znajdź $f \circ g$ oraz $g \circ f$:*

a) $f(x) = 2x + 5$, *dla* $x \in \mathbb{R} \qquad g(x) = -x^2 + 3x - 1$, *dla* $x \in \mathbb{R}$

b) $f(x, y) = xy + x^2$, *dla* $x, y \in \mathbb{R} \qquad g(x) = (x, \sin x)$, *dla* $x \in \mathbb{R}$

c) $f(x) = -x^3 + 4x^2 - 6$, *dla* $x \in \mathbb{R} \qquad g(x) = x(x - 1)^2$, *dla* $x \in \mathbb{R}$

d) $f(x, y) = (y - 2, -x + 3)$, *dla* $x, y \in \mathbb{R} \qquad g(x, y) = \left(xy, x^2 - y^2\right)$, *dla* $x, y \in \mathbb{R}$

Zadanie 2.16. *Dla danej funkcji f oraz zbiorów A, B znajdź $\vec{f}(A)$ oraz $\vec{f}^{-1}(B)$:*

a) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x^2 - 4x + 3$, *gdzie* $A = (2, 4\rangle\,,\ B = \langle 3, 5)$

b) $f\colon \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{x-1}$, *gdzie* $A = (-\infty, 0\rangle\,,\ B = \{-1, 1\}$

c) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = 2^x - 4$, *gdzie* $A = \langle -1, 1\rangle\,,\ B = (0, \infty)$

d) $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \log_2 x$, *gdzie* $A = (0, 1)\,,\ B = \{2, 8\}$

e) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \sin x + 1$, *gdzie* $A = \left\langle \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{4}\right)\,,\ B = \{0\}$

f) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \left|-x^2 - x + 2\right| - 1$, *gdzie* $A = \mathbb{R},\ B = (-1, 0\rangle$

Zadanie 2.17. *Oblicz moc zbioru A, jeżeli:*

a) $A = \varnothing$

b) $A = \{n \in \{1, 2, \ldots, 16\} : 2 \mid n\}$

c) $A = \left\{x \in \mathbb{R} : x^2 + 3x - 4 = 0\right\}$

d) $A = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N} : x \in \langle -2, 3\rangle \wedge y \leqslant 4\}$

e) $A = B \cap C$, *gdzie* $B = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^3\right\}$, $C = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x\right\}$

f) $A = \mathcal{P}(\{1, 2, 3\})$

Zadanie 2.18. *Pokaż, że następujące zbiory A i B są równoliczne:*

a) $A = \left\{x \in \mathbb{R} : x^2 - 2x + 1 = 0\right\}$, $B = \{\varnothing\}$

b) $A = \{x \in \mathbb{R} : |x + 2| - 3 = 0\}$, $B = \{n \in \{1, 2, 3, \ldots, 18\} : 7 \mid n\}$

c) $A = \{0, 1, 2\}$, $B = \left\{\sqrt{2}, e, \pi\right\}$

d) $A = \mathbb{N}$, $B = \{2n : n \in \mathbb{N}\}$

e) $A = \mathbb{N}$, $B = \{2n + 1 : n \in \mathbb{N}\}$

f) $A = \mathbb{N}$, $B = \mathbb{N} \setminus \{0\}$

g) $A = \mathbb{N}$, $B = \mathbb{N} \setminus \{138\}$

h) $A = \mathbb{N}$, $B = \mathbb{N} \setminus \{13, 25\}$

i) $A = \mathbb{N}$, $B = \mathbb{N} \setminus \{4, 9, 15, 23\}$

j) $A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\right\}$, $B = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 4\right\}$

k) $A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^2\right\}$, $B = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^2 + 1\right\}$

l) $A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in \langle -1, 1\rangle \wedge y \in \langle -1, 1\rangle\right\}$, $B = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in \langle -3, 3\rangle \wedge y \in \langle -3, 3\rangle\right\}$

Zadanie 2.19. *Oblicz moc następujących zbiorów:*

a) $P = \{2n : n \in \mathbb{N}\}$

b) $\mathbb{Z}$

c) $\mathbb{Q}$

d) *dowolny odcinek* (a, b), *gdzie* $a < b$

Wskazówki i odpowiedzi

Odp 2.1.

a) $A \cup B = (-\infty; 1) \cup (2; +\infty) \quad A \cap B = (-\infty; -2)$
$A \setminus B = (2; +\infty) \quad B \setminus A = \langle -2; 1) \quad A \vartriangle B = \langle -2; 1) \cup (2; +\infty)$

b) $A \cup B = (-4; +\infty) \quad A \cap B = \varnothing \quad A \setminus B = (-4; 4) \quad B \setminus A = \langle 4; +\infty) \quad A \vartriangle B = (-4; +\infty)$

c) $A \cup B = (-\infty; -3) \cup \langle -1; 1\rangle \cup (3; +\infty) \quad A \cap B = \varnothing$
$A \setminus B = (-\infty; -3) \cup (3; +\infty) \quad B \setminus A = \langle -1; 1\rangle \quad A \vartriangle B = (-\infty; -3) \cup \langle -1; 1\rangle \cup (3; +\infty)$

d) A *- półproste* $y = -x$ *oraz* $y = x$ *o początku w* $P(0, 0)$ *(górne ramiona)*
B *- koło* $K((0, 0); 2)$ *bez brzegu*

e) A *- prawa półpłaszczyzna z krawędzią wyznaczona przez prostą* $y = x$
B *- lewa półpłaszczyzna bez krawędzi wyznaczona przez prostą* $y = -x + 3$

f) A *- półproste* $y = -2x - 2$ *oraz* $y = 2x$ *o początku w* $P\left(-\frac{1}{2}, -1\right)$ *(górne ramiona)*
B *- dolna część płaszczyzny z brzegiem wyznaczona przez parabolę* $y = -x^2 + 1$

Odp 2.2. *Korzystając z definicji działań na zbiorach oraz praw rachunku zdań należy przekształcić jedną ze stron równości do postaci drugiej strony.*

Odp 2.3. *Należy doprowadzić jedną ze stron równości do postaci drugiej za pomocą praw rachunku zbiorów.*

Odp 2.4. *a, c, d) są zdaniami prawdziwymi, natomiast b) jest fałszywe.*

Odp 2.5.

a) $\mathcal{P}(A) = \{\varnothing\}$

b) $\mathcal{P}(A) = \{\varnothing, \{4\}\}$

c) $\mathcal{P}(A) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$

d) $\mathcal{P}(A) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$

Odp 2.6.

a) $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \mathbb{R} \quad \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = (-\infty; 1)$

b) $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \langle 0; 1\rangle \quad \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \{0\}$

c) $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = (1; 4\rangle \quad \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = (2; 3\rangle$

d) $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \mathbb{R} \quad \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \left\langle -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right\rangle$

Odp 2.7.

a) $\bigcup_{t \in \mathbb{R}} A_t = \mathbb{R} \quad \bigcap_{t \in \mathbb{R}} A_t = \{2\}$

b) $\bigcup_{t \in \mathbb{R}} A_t = \mathbb{R} \setminus \{2\} \quad \bigcap_{t \in \mathbb{R}} A_t = \varnothing$

c) $\bigcup_{t \in \mathbb{R}} A_t = \mathbb{R}^2 \quad \bigcap_{t \in \mathbb{R}} A_t = \{(0, 0)\}$

d) $\bigcup_{t \in \mathbb{R}} A_t = \mathbb{R}^2 \quad \bigcap_{t \in \mathbb{R}} A_t = \varnothing$

Odp 2.8. *Przed wykreśleniem iloczynu kartezjańskiego zbiorów w układzie współrzędnych zaleca się naszkicowanie na osiach liczbowych zbiorów A oraz B, co znacznie ułatwi zadanie.*

Odp 2.9. *Korzystając z definicji iloczynu kartezjańskiego zbiorów, działań na zbiorach oraz praw rachunku zdań należy przekształcić jedną ze stron równości do postaci drugiej strony.*

Odp 2.10.

a) $D_l(\mathcal{R}) = \{1, 2, 3\} \quad D_p(\mathcal{R}) = \{2, 4, 5\}$

b) $D_l(\mathcal{R}) = \{-1, 0, 1\} \quad D_p(\mathcal{R}) = \{1\}$

c) $D_l(\mathcal{R}) = \{-1, 0, 1\} \quad D_p(\mathcal{R}) = \{0, 1, 2\}$

d) $D_l(\mathcal{R}) = \mathbb{N} \quad D_p(\mathcal{R}) = \mathbb{N} \setminus \{0\}$

e) $D_l(\mathcal{R}) = \{4, 5\} \quad D_p(\mathcal{R}) = \{y \colon y = 4n \vee y = 5n, n \in \mathbb{N}\}$

f) $D_l(\mathcal{R}) = \{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18\} \quad D_p(\mathcal{R}) = \{12, 18\}$

g) $D_l(\mathcal{R}) = \mathbb{R} \quad D_p(\mathcal{R}) = \langle 1, +\infty \rangle$

h) $D_l(\mathcal{R}) = \mathbb{R} \quad D_p(\mathcal{R}) = (-\infty, -5\rangle$

Odp 2.11.

a) $\mathcal{R}_1$ *jest zwrotna, antysymetryczna, przechodnia; nie jest symetryczna, spójna.*

b) $\mathcal{R}_2$ *jest zwrotna, symetryczna, przechodnia; nie jest antysymetryczna, spójna.*

c) $\mathcal{R}_3$ *nie jest zwrotna, symetryczna, antysymetryczna, przechodnia, spójna.*

Odp 2.12.

a) $\mathcal{R}$ *jest symetryczna; nie jest zwrotna, antysymetryczna, przechodnia, spójna. Nie jest relacją równoważności.*

b) $\mathcal{R}$ *jest symetryczna; nie jest zwrotna, antysymetryczna, przechodnia, spójna. Nie jest relacją równoważności.*

c) $\mathcal{R}$ *jest zwrotna, symetryczna, przechodnia; nie jest antysymetryczna, spójna. Jest relacją równoważności. Klasy abstrakcji:* $[0]_{\mathcal{R}} = \{0\}, \quad [a]_{\mathcal{R}} = \{-a, a\}$ *dla* $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

d) $\mathcal{R}$ *jest zwrotna, symetryczna, przechodnia; nie jest antysymetryczna, spójna. Jest relacją równoważności. Klasy abstrakcji:* $[0]_{\mathcal{R}} = \{0\}, \quad [a]_{\mathcal{R}} = \{-a, a\}$ *dla* $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

e) $\mathcal{R}$ *jest zwrotna, antysymetryczna, przechodnia, spójna, nie jest symetryczna. Nie jest relacją równoważności.*

f) $\mathcal{R}$ *jest zwrotna, symetryczna, przechodnia; nie jest antysymetryczna, spójna. Jest relacją równoważności. Klasy abstrakcji:* $[0]_{\mathcal{R}} = \{3k \colon k \in \mathbb{Z}\}, \quad [1]_{\mathcal{R}} = \{3k + 1 \colon k \in \mathbb{Z}\},$ $[2]_{\mathcal{R}} = \{3k + 2 \colon k \in \mathbb{Z}\}$

g) $\mathcal{R}$ *nie jest zwrotna, symetryczna, antysymetryczna, przechodnia, spójna. Nie jest relacją równoważności.*

h) $\mathcal{R}$ *jest symetryczna, przechodnia; nie jest zwrotna, antysymetryczna, spójna. Nie jest relacją równoważności.*

i) $\mathcal{R}$ *jest zwrotna, symetryczna, przechodnia; nie jest antysymetryczna, spójna. Jest relacją równoważności. Klasy abstrakcji:* $[0]_{\mathcal{R}} = \{2,4,6,8,10,12,14,16\}$, $\quad [1]_{\mathcal{R}} = \{1,3,5,7,9,11,13,15\}$

Odp 2.13.

a) $\mathcal{R}$ *jest funkcją.* $D_l(\mathcal{R}) = X = \mathbb{R} \quad Y = \mathbb{R} \quad D_p(\mathcal{R}) = \mathbb{R}$.

g) $\mathcal{R}$ *jest funkcją.* $D_l(\mathcal{R}) = X = \mathbb{N} \quad Y = \mathbb{N} \quad D_p(\mathcal{R}) = \mathbb{N}$.

h) $\mathcal{R}$ *jest funkcją.* $D_l(\mathcal{R}) = X = \mathbb{R} \quad Y = \mathbb{R} \quad D_p(\mathcal{R}) = \langle -4; +\infty)$.

$\mathcal{R}$ *nie jest funkcją w b, c, d, e, f).*

Odp 2.14.

a) f *jest bijekcją, stąd istnieje* $f^{-1}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *określona wzorem* $f^{-1}(x) = -\frac{1}{4}x + \frac{5}{4}$.

b) Nie istnieje f^{-1} *bo* f *nie jest injekcją.*

c) Nie istnieje f^{-1} *bo* f *nie jest surjekcją.*

d) f *jest bijekcją, stąd istnieje* $f^{-1}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *określona wzorem* $f^{-1}(x) = \begin{cases} \frac{x}{x-1} & ,x \neq 1 \\ 1 & ,x = 1 \end{cases}$.

e) f *jest bijekcją, stąd istnieje* $f^{-1}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *określona wzorem* $f^{-1}(x) = \begin{cases} -\sqrt{-x} & ,x < 0 \\ x & ,x \in \langle 0,1) \\ \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} & ,x \geqslant 1 \end{cases}$.

f) f *jest bijekcją, stąd istnieje* $f^{-1}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *określona wzorem* $f^{-1}(x,y) = \left(-\frac{1}{3}y + 2, \frac{1}{2}x\frac{1}{6}y - 1\right)$.

g) Nie istnieje f^{-1} *bo* f *nie jest injekcją.*

h) Nie istnieje f^{-1} *bo* f *nie jest surjekcją ani injekcją.*

Odp 2.15.

a) $(f \circ g)(x) = 2\left(-x^2 + 3x - 1\right)^2 + 5 \quad (g \circ f)(x) = -(2x+5)^2 + 3(2x+5) - 1$

b) $(f \circ g)(x) = x \sin x + x^2 \quad (g \circ f)(x,y) = \left(xy + x^2, \sin\left(xy + x^2\right)\right)$

c) $(f \circ g)(x) = -\left[x(x-1)^2\right]^3 + 4\left[x(x-1)^2\right]^2 - 6 \quad (g \circ f)(x) = \left(-x^3 + 4x^2 - 6\right)\left(-x^3 + 4x^2 - 7\right)^2$

d) $(f \circ g)(x,y) = \left(x^2 - y^2 - 2, -xy + 3\right) \quad (g \circ f)(x,y) = \Big((y-2)(-x+3), (y-2)^2 - (-x+3)^2\Big)$

Odp 2.16.

a) $\vec{f}(A) = (-1,3\rangle \quad \vec{f}^{-1}(B) = \left(2 - \sqrt{6}; 0\right\rangle \cup \left\langle 4; 2 + \sqrt{6}\right)$

b) $\vec{f}(A) = \langle -1; 0) \quad \vec{f}^{-1}(B) = \{0, 2\}$

c) $\vec{f}(A) = \left\langle -3\frac{1}{2}; -2\right\rangle \quad \vec{f}^{-1}(B) = (2; +\infty)$

d) $\vec{f}(A) = (-\infty; 0) \quad \vec{f}^{-1}(B) = \{4, 256\}$

e) $\vec{f}(A) = \left\langle -\frac{\sqrt{2}}{2} + 1; 2\right\rangle \quad \vec{f}^{-1}(B) = \left\{\frac{3}{2}\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

f) $\vec{f}\,(A) = \langle -1; +\infty)$

$\vec{f}^{-1}\,(B) = \left\langle -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{13}}{2}; -2\right) \cup \left(-2; -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}\right\rangle \cup \left\langle -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}; 1\right) \cup \left(1; -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{13}}{2}\right\rangle$

Odp 2.17.

a) $|A| = 0$ *b)* $|A| = 8$ *c)* $|A| = 2$ *d)* $|A| = 30$ *e)* $|A| = 3$ *f)* $|A| = 8$

Odp 2.18.

a) $A = \{1\}$ $B\,\{\varnothing\}$, *czyli* $|A| = |B| = 1$

b) $A = \{-5, 1\}$ $B\,\{7, 14\}$, *czyli* $|A| = |B| = 2$

c) $|A| = |B| = 3$

d) $|A| = |B|$ *bo istnieje bijekcja* $f\colon A \to B$ *określona wzorem* $f\,(n) = 2n$

e) $|A| = |B|$ *bo istnieje bijekcja* $f\colon A \to B$ *określona wzorem* $f\,(n) = 2n + 1$

f) $|A| = |B|$ *bo istnieje bijekcja* $f\colon A \to B$ *określona wzorem* $f\,(n) = n + 1$

g) $|A| = |B|$ *bo istnieje bijekcja* $f\colon A \to B$ *określona wzorem* $f\,(n) = \begin{cases} n & , n \leqslant 137 \\ n+1 & , n \geqslant 138 \end{cases}$

h) $|A| = |B|$ *bo istnieje bijekcja* $f\colon A \to B$ *określona wzorem* $f\,(n) = \begin{cases} n & , n \leqslant 12 \\ n+1 & , 13 \leqslant n \leqslant 23 \\ n+2 & , n \geqslant 24 \end{cases}$

i) $|A| = |B|$ *bo istnieje bijekcja* $f\colon A \to B$ *określona wzorem* $f\,(n) = \begin{cases} n & , n \leqslant 3 \\ n+1 & , 4 \leqslant n \leqslant 7 \\ n+27 & , 8 \leqslant n \leqslant 12 \\ n+3 & , 13 \leqslant n \leqslant 19 \\ n+4 & , n \geqslant 20 \end{cases}$

j $|A| = |B|$ *bo istnieje bijekcja* $f\colon A \to B$ *określona wzorem* $f\,(x, y) = (2x, 2y)$

k $|A| = |B|$ *bo istnieje bijekcja* $f\colon A \to B$ *określona wzorem* $f\,(x, y) = (x, y + 1)$

l) $|A| = |B|$ *bo istnieje bijekcja* $f\colon A \to B$ *określona wzorem* $f\,(x, y) = (3x, 3y)$

Odp 2.19.

a) $|P| = |\mathbb{N}| = \aleph_0$ *- patrz Zadanie 2.18 d).*

b) $|\mathbb{Z}| = |\mathbb{N}| = \aleph_0$ *bo istnieje bijekcja* $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ *określona wzorem* $f\,(n) = \begin{cases} -\frac{n}{2} & , n \text{ parzyste} \\ \frac{n+1}{2} & , n \text{ nieparzyste} \end{cases}$

c) $|\mathbb{Q}| = |\mathbb{N}| = \aleph_0$ *bo elementy zbioru* $\mathbb{Q}$ *dają się ustawić w ciąg różnowartościowy. Najpierw należy wpisać w odpowiedni sposób elementy zbioru* $\mathbb{Q}_+$ *w tablicę, co doprowadzi do powstania ciągu. Nastepnie wstawić na początek ciągu* 0, *a za każdą liczbą - liczbę do niej przeciwną.*

d) Przedział (a, b) *można potraktować jako odcinek i wówczas znajduje się bijekcję pomiędzy danym a dowolnym odcinkiem. Z kolei istnieje bijekcja* $f\colon \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$ *określona wzorem* $f\,(x) = \operatorname{tg} x$, *następnie korzystając z przechodniości równoliczności* $|(a, b)| = |\mathbb{R}| = \mathfrak{c}$

3 Liczby zespolone

Zadanie 3.1. *Dla danej liczby zespolonej z znajdź jej część rzeczywistą i urojoną, oraz $\bar{z}$, $|z|$. Poszukaj z oraz $\bar{z}$ w układzie współrzędnych.*

a) $z = 8 + 6i$ *b)* $z = -3 - 4i$ *c)* $z = i$ *d)* $z = 2$ *e)* $z = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$ *f)* $z = -5i$

Zadanie 3.2. *Dla danych liczb zespolonych z_1 i z_2 oblicz $z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$, $z_1 \cdot z_2$, $\frac{z_1}{z_2}$:*

a) $z_1 = 3 - 4i$, $z_2 = 2 + i$ *b)* $z_1 = 5 + 2i$, $z_2 = -2 - i$

c) $z_1 = i$, $z_2 = 1 - i$ *d)* $z_1 = 1 + i$, $z_2 = 3i$

Zadanie 3.3. *Jaki zbiór na płaszczyźnie określa następujący warunek?*

a) $|z - i| \leqslant 2$ *b)* $Re\,(z - i)^2 \geqslant 0$ *c)* $z^2 = 2Re\,(iz)$

d) $\left|\frac{4+3i}{z-2i}\right| \geqslant 5$ *e)* $Im\,z + 1 \geqslant 2$ *f)* $|z - 2i + 3| > 2$

g) $4 < Re^2\,(z - 1) + Im^2\,(z + i) \leqslant 9$ *h)* $|z| > 1 \wedge \frac{\pi}{6} < Arg\,z \leqslant \frac{\pi}{3}$

Zadanie 3.4. *Znajdź takie liczby $x, y \in \mathbb{R}$, aby zachodziła równość:*

a) $(1 + i)\,x + (-2 + 5i)\,y = -4 + 17i$ *b)* $(2 + 3i)\,x + (4 - 5i)\,y = 6 - 2i$

c) $\frac{2x}{1-i} + y = 2$ *d)* $\frac{x}{2-3i} + \frac{y}{3+2i} = 1$

Zadanie 3.5. *Rozwiąż równanie:*

a) $2z + (1 + i)\,\bar{z} = 1 - 3i$ *b)* $z^2 = 3 - 4i$

c) $2iz^2 + 2\,(1 - i)\,z - 1 - 2i = 0$ *d)* $iz^2 + (2 - 4i)\,z - 4 + 2i = 0$

Zadanie 3.6. *Oblicz pierwiastek kwadratowy z liczby zespolonej nie używając wzoru na n-ty pierwiastek z liczby zespolonej:*

a) $-\frac{3}{4} - i$ *b)* $8 + 6i$ *c)* i *d)* $-3 + 4i$

Zadanie 3.7. *Przedstaw w postaci trygonometrycznej liczbę zespoloną:*

a) $-1 + i$ *b)* i *c)* $1 - i$ *d)* $-1 + i\sqrt{3}$ *e)* $\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$ *f)* $-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

Zadanie 3.8. *Korzystając ze wzoru de Moivre'a oblicz:*

a) $\left(-1 + i\sqrt{3}\right)^{17}$ *b)* $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)^{49}$ *c)* $\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{15}$ *d)* i^{23}

Zadanie 3.9. *Oblicz:*

a) $\sqrt[4]{-i}$ *b)* $\sqrt[3]{-1}$ *c)* $\sqrt[6]{i}$ *d)* $\sqrt[3]{-1 + i}$ *e)* $\sqrt[4]{1}$

Wskazówki i odpowiedzi

Odp 3.1.

a) $Re\, z = 8 \quad Im\, z = 6 \quad \bar{z} = 8 - 6i \quad |z| = 10$

b) $Re\, z = -3 \quad Im\, z = -4 \quad \bar{z} = -3 + 4i \quad |z| = 5$

c) $Re\, z = 0 \quad Im\, z = 1 \quad \bar{z} = -i \quad |z| = 1$

d) $Re\, z = 2 \quad Im\, z = 0 \quad \bar{z} = 2 \quad |z| = 2$

e) $Re\, z = \frac{1}{2} \quad Im\, z = \frac{1}{2} \quad \bar{z} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i \quad |z| = \frac{\sqrt{2}}{2}$

f) $Re\, z = 0 \quad Im\, z = -5 \quad \bar{z} = 5i \quad |z| = 5$

Odp 3.2.

a) $z_1 + z_2 = 5 - 3i \quad z_1 - z_2 = 1 - 5i \quad z_1 \cdot z_2 = 10 - 5i \quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{2}{5} - \frac{11}{5}i$

b) $z_1 + z_2 = 3 + i \quad z_1 - z_2 = 7 + 3i \quad z_1 \cdot z_2 = -8 - 9i \quad \frac{z_1}{z_2} = -\frac{12}{5} + \frac{1}{5}i$

c) $z_1 + z_2 = 1 \quad z_1 - z_2 = -1 \quad z_1 \cdot z_2 = 1 + i \quad \frac{z_1}{z_2} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$

d) $z_1 + z_2 = 1 + 4i \quad z_1 - z_2 = 1 - 2i \quad z_1 \cdot z_2 = -3 + 3i \quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}i$

Odp 3.3.

a) $K\left((0,1)\,;2\right)$

b) *Lewa i prawa ćwiartka płaszczyzny wraz z brzegiem wyznaczone przez proste* $y = -x + 1$ *oraz* $y = x + 1$

c) *Punkty* $(0,0)$ *i* $(0,1)$

d) $K\left((0,2)\,;1\right) \setminus \{(0,2)\}$

e) *Górna półpłaszczyzna z brzegiem wyznaczona przez prostą* $y = 1$

f) $\mathbb{R}^2 \setminus K\left((-3,2)\,;2\right)$

g) $K\left((1,-1)\,;3\right) \setminus K\left((1,-1)\,;2\right)$

h) *Część wspólna zbioru* $\mathbb{R}^2 \setminus K\left((0,0)\,;1\right)$ *oraz wycinka płaszczyzny ograniczonego przez półproste nachylone do osi OX pod kątami* $\frac{\pi}{6}$ *(bez brzegu) i* $\frac{\pi}{3}$ *(z brzegiem)*

Odp 3.4.

a) $x = 2, y = 3$ *b)* $x = \frac{19}{11}, y = \frac{7}{11}$ *c)* $x = 0, y = 2$ *d)* $x = 2, y = 3$

Odp 3.5.

a) $z = 2 - 5i$ *b)* $z = \pm(2 - i)$ *c)* $z = -\frac{3}{2} - \frac{1}{2}i \lor z = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$ *d)* $z = -\frac{1}{2}i \lor z = 2 - \frac{1}{2}i$

Odp 3.6.

a) $\sqrt{-\frac{3}{4} - i} = \pm\left(\frac{1}{2} - i\right)$ *b)* $\sqrt{8 + 6i} = \pm(1 + 3i)$

c) $\sqrt{i} = \pm\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$ *d)* $\sqrt{-3 + 4i} = \pm(1 + 2i)$

Odp 3.7.

a) $-1+i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{3}{4}\pi+i\sin\frac{3}{4}\pi\right)$

b) $i=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}$

c) $1-i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{5}{4}\pi+i\sin\frac{5}{4}\pi\right)$

d) $-1+i\sqrt{3}=2\left(\cos\frac{2}{3}\pi+i\sin\frac{2}{3}\pi\right)$

e) $\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i=\cos\frac{11}{6}\pi+i\sin\frac{11}{6}\pi$

f) $-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}=\cos\frac{2}{3}\pi+i\sin\frac{2}{3}\pi$

Odp 3.8.

a) $z^{17}=2^{17}\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

b) $z^{49}=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$

c) $z^{15}=1$

d) $z^{23}=-1$

Odp 3.9.

a) $\sqrt[4]{-i}=\left\{\frac{2}{5}+\frac{9}{10}i,-\frac{9}{10}+\frac{2}{5}i,-\frac{2}{5}-\frac{9}{10}i,\frac{9}{10}-\frac{2}{5}i\right\}$

b) $\sqrt[3]{-1}=\left\{\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2},-1,\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$

c) $\sqrt[6]{i}=\left\{\frac{9}{10}+\frac{3}{10}i,\frac{3}{10}+\frac{9}{10}i,-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{9}{10}-\frac{3}{10}i,-\frac{3}{10}-\frac{9}{10}i,\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$

d) $\sqrt[3]{-1+i}=\left\{\sqrt[6]{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right),\sqrt[6]{2}\left(-\frac{9}{10}+\frac{3}{10}i\right),\sqrt[6]{2}\left(\frac{3}{10}-\frac{9}{10}i\right)\right\}$

e) $\sqrt[4]{1}=\{1,i,-1,-i\}$

4 Macierze i wyznaczniki

Zadanie 4.1. *Oblicz, jeśli*

$$A=\begin{bmatrix}1&2\\0&3\\-1&1\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}1&-1\\2&0\\3&4\end{bmatrix},\quad C=\begin{bmatrix}1&-1\\0&2\end{bmatrix},\quad D=\begin{bmatrix}2&1\\-4&0\end{bmatrix}:$$

a) $A+B$ *b)* $2(A-B)$ *c)* $2A-B$ *d)* $2(A-3B)$

e) $2A^T-B^T$ *f)* $3(2A+B)^T$ *g)* $C+D^T$ *h)* $2C^T+D$

i) $C-3D^T$ *j)* $2\left(C+D^T\right)^T$

Zadanie 4.2. *Oblicz, jeśli* $A=\begin{bmatrix}-i&1+i\\3&2-5i\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}2+i&-4i\\1-2i&-3\end{bmatrix}:$

a) $A+2B$ *b)* $2A-B$ *c)* A^T+B *d)* $2\left(A-B^T\right)^T$

Zadanie 4.3. *Dane są macierze*

$$A=\begin{bmatrix}4&0\\0&3\\2&7\\1&5\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}3&4&2\\5&6&1\end{bmatrix},$$ *przy czym przyjęto oznaczenia:*

a_{ik} *- ilość gram k-tej substancji, którą potrzebuje i-ty chemik,*
b_{kj} *- cena za 1 gram dawki k-tej substancji pochodzącej od j-tego producenta.*

Oblicz iloczyn AB i odczytaj:

a) kwotę, jaką zapłaciłby trzeci chemik u drugiego producenta

b) kwotę, jaką zapłaciliby łącznie wszyscy chemicy u pierwszego producenta

c) numer producenta, u którego pierwszy chemik zapłaciłby najmniej

d) numer producenta, u którego czwarty chemik zapłaciłby najwięcej

e) numer producenta, który zarobi najwięcej

f) czy istnieją chemicy, którzy zapłacą taką samą końcową kwotę?

Zadanie 4.4. *Wyznacz możliwe iloczyny macierzy wśród A, B, C, D z Zadania 4.1.*

Zadanie 4.5. *Dla macierzy z Zadania 4.2 oblicz:*

a) A^2 *b)* BA *c)* AB^T *d)* BA^T

Zadanie 4.6. *Rozwiąż równanie dla macierzy:*

$$A=\begin{bmatrix}1&2&0\\0&3&-1\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}-1&3&1\\1&2&0\end{bmatrix}$$

a) $3(A+X)=A+2B$ *b)* $2\left(X+B^T\right)=B^T-A^T$

c) $2\left((A+B)^T+X\right)=3\left(X+A^T\right)$ *d)* $2\left(AB^T+3X\right)=5X-2AA^T$

Zadanie 4.7. *Oblicz wyznaczniki:*

a) $\begin{vmatrix} 1 & -7 \\ 4 & 8 \end{vmatrix}$ *b)* $\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 5 & 7 \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} 2i & 4-i \\ 4+i & i \end{vmatrix}$ *d)* $\begin{vmatrix} 1+i & 5i \\ -4 & 3-2i \end{vmatrix}$

e) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -2 & 3 & 5 \end{vmatrix}$ *f)* $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 3 \end{vmatrix}$ *g)* $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix}$

h) $\begin{vmatrix} 3i & 0 & 1+i \\ 2 & 4 & -i \\ 1-i & 3i & 1 \end{vmatrix}$ *i)* $\begin{vmatrix} i & 1 & 1-i \\ 0 & -2 & 4+3i \\ 2i & 0 & 5 \end{vmatrix}$ *j)* $\begin{vmatrix} i & 1-4i & 8+6i \\ 0 & 1+i & 3i \\ 0 & 0 & 1-i \end{vmatrix}$

k) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$ *l)* $\begin{vmatrix} 4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ *ł)* $\begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 \\ 7 & 0 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}$

m) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 3 & 5 \\ -1 & 2 & -2 & -3 \end{vmatrix}$ *n)* $\begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 4 & 3 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 1 & -4 \end{vmatrix}$

o) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{vmatrix}$ *p)* $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 11 & 12 & 0 & 0 & 0 \\ 13 & 14 & 0 & 0 & 0 \\ 15 & 16 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

Zadanie 4.8. *Wyznacz, jeśli to możliwe, macierz odwrotną do danej macierzy:*

a) $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ *b)* $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

c) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ *d)* $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ *e)* $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \end{bmatrix}$

f) $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -2 & -5 & -7 \\ -1 & -2 & -4 \end{bmatrix}$ *g)* $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ *h)* $A = \begin{bmatrix} -3 & -4 & -2 & -2 \\ 1 & -3 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

Zadanie 4.9. *Wykorzystując operację odwracania macierzy rozwiąż równanie:*

a) $\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

b) $X \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

c) $X \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot X \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$

Zadanie 4.10. *Znajdź rząd podanych macierzy:*

a) $\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 10 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 2 & -4 & 8 & -6 \\ 5 & -10 & 20 & 0 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \\ 4 & 2 & 8 \end{bmatrix}$ e) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \end{bmatrix}$ f) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

g) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -2 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & -3 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ h) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

Zadanie 4.11. *Korzystając ze wzorów Cramera rozwiąż układy równań:*

a) $\begin{cases} x + 5y = 2 \\ -3x + 6y = 15 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x - y - z = 1 \\ 3x + 4y - 2z = -1 \\ 3x - 2y - 2z = 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x - 2z = 3 \\ -y + 3z = 1 \\ 2x + 5z = 0 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x - 2y + 3z = 1 \\ 2x - y + 5z = 1 \\ 3x - 4y + 8z = 3 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 2x - y + 3z = 7 \\ 3x + 2y - 5z = 4 \\ 4x + 5y - 13z = 2 \end{cases}$ f) $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + 2y - 3z = 7 \\ 3x + 8y - 2z = 8 \end{cases}$

g) $\begin{cases} 2x - y + 3z = 7 \\ 3x + 2y - 5z = 4 \\ 4x + 5y - 13z = 1 \end{cases}$ h) $\begin{cases} x - y - 2z + 2u = -2 \\ 5x - 3y - z + u = 3 \\ 2x + y - z + u = 1 \\ 3x - 2y + 2z - 2u = -4 \end{cases}$

i) $\begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ 3x + 3y + 2z = 0 \end{cases}$ j) $\begin{cases} x + 4y + 7z = 0 \\ 2x + 5y + 8z = 0 \\ 3x + 6y + 9z = 0 \end{cases}$

k) $\begin{cases} 3x + 2y - z = 0 \\ x + 3y - 4z = 0 \\ x - 4y + 7z = 0 \end{cases}$ l) $\begin{cases} 3x - y + 2z = 0 \\ 4x + 2y - 5z = 0 \\ 2x - 7y + 11z = 0 \end{cases}$

Zadanie 4.12. *Rozwiąż układy równań metodą eliminacji Gaussa - Jordana:*

a) $\begin{cases} x + 2y + 3z = 14 \\ 3x + y + 2z = 11 \\ 2x + 3y + z = 11 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + 2y + z = 4 \\ 2x + 3y + 2z = 4 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + 7y - 3z = 7 \\ 3x + 8y - 2z = 8 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 3x - 5y + 2z + 4u = 2 \\ 7x - 4y + z + 3u = 5 \\ 5x + 7y - 4z - 6u = 3 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x + y + z + u = 0 \\ 3x + 4y - 2z + u = 0 \\ 4x + 5y - z + 2u = 0 \end{cases}$ f) $\begin{cases} 3x + 12y + 5z = 20 \\ 5x - 3y - 10z = -8 \\ 4x - 17y + 2z = -11 \end{cases}$

Zadanie 4.13. *W laboratorium czterech chemików A, B, C, D otrzymało mieszaniny o wagach 60 g, 60 g, 90 g, 70 g. Oblicz, ile gram ważyła pojedyncza dawka substancji a, b, c, jeśli:*

- *chemik A użył 1 dawkę substancji a, 2 dawki substancji b, 2 dawki substancji c*
- *chemik B użył 2 dawki substancji a, 1 dawkę substancji b, 1 dawkę substancji c*
- *chemik C użył 1 dawkę substancji a, 2 dawki substancji b, 4 dawki substancji c*
- *chemik D użył 1 dawkę substancji a, 1 dawki substancji b, 3 dawki substancji c*

Wskazówki i odpowiedzi

Odp 4.1.

a) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ *b)* $\begin{bmatrix} 0 & 6 \\ -4 & 6 \\ -8 & -6 \end{bmatrix}$ *c)* $\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 6 \\ -5 & -2 \end{bmatrix}$ *d)* $\begin{bmatrix} -4 & 10 \\ -12 & 6 \\ -20 & -22 \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & -5 \\ 5 & 6 & -2 \end{bmatrix}$ *f)* $\begin{bmatrix} 9 & 6 & 3 \\ 9 & 18 & 18 \end{bmatrix}$ *g)* $\begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ *h)* $\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -6 & 4 \end{bmatrix}$

i) $\begin{bmatrix} -5 & 11 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$ *j)* $\begin{bmatrix} 6 & 2 \\ -10 & 4 \end{bmatrix}$

Odp 4.2.

a) $\begin{bmatrix} 4+i & 1-7i \\ -15-4i & -4-5i \end{bmatrix}$ *b)* $\begin{bmatrix} -2-3i & 2+6i \\ 5+2i & 7-10i \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 2 & 3-4i \\ 2-i & -1-5i \end{bmatrix}$ *d)* $\begin{bmatrix} -4-4i & 6+8i \\ 6i & 10-10i \end{bmatrix}$

Odp 4.3.

$AB = \begin{bmatrix} 12 & 16 & 8 \\ 15 & 18 & 3 \\ 41 & 50 & 11 \\ 28 & 34 & 7 \end{bmatrix}$, *to a)* 50 *b)* 96 *c)* 1*-szy* *d)* 2*-gi* *e)* 2*-gi* *f)* 1*-szy i* 2*-gi*

Odp 4.4.

$AC = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 6 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ $AD = \begin{bmatrix} -6 & 1 \\ -12 & 0 \\ -6 & -1 \end{bmatrix}$ $BC = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ $BD = \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 4 & 2 \\ -10 & 3 \end{bmatrix}$

$C^2 = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ $CD = \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ -8 & 0 \end{bmatrix}$ $D^2 = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -8 & -4 \end{bmatrix}$ $DC = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -4 & 4 \end{bmatrix}$

Odp 4.5.

a) $\begin{bmatrix} 2+3i & 8-4i \\ 6-18i & -18-17i \end{bmatrix}$ *b)* $\begin{bmatrix} 1-14i & -19-5i \\ -11-i & -3+14i \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 5-6i & -5-4i \\ -14-5i & -3+9i \end{bmatrix}$ *d)* $\begin{bmatrix} 5-6i & -14-5i \\ -5-4i & -3+9i \end{bmatrix}$

Odp 4.6.

a) $X = \begin{bmatrix} -\frac{4}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$ *b)* $X = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{5}{2} & -\frac{5}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

c) $X = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 4 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ *d)* $X = \begin{bmatrix} -20 & -22 \\ -28 & -32 \end{bmatrix}$

Odp 4.7.

a) 36 *b)* -29 *c)* -19 *d)* $5+21i$ *e)* -16 *f)* 15 *g)* 6

h) $-14+9i$ *i)* $-2+2i$ *j)* $2i$ *k)* -30 *l)* 0 *ł)* -123 *m)* -26

n) -18 *o)* 6 *p)* 0

Odp 4.8.

a) det $A=1$ $A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ *b)* A^{-1} *nie istnieje bo det* $A=0$

c) A^{-1} *nie istnieje bo det* $A=0$ *d) det* $A=2$ $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

e) det $A=6$ $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$ *f) det* $A=1$ $A^{-1} = \begin{bmatrix} 6 & 8 & -11 \\ -1 & -2 & 3 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

g) det $A=4$ $A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & -2 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$ *h) det* $A=1$ $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ -3 & -3 & -5 & -3 \\ -1 & 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$

Odp 4.9.

a) $X = \begin{bmatrix} 2 & -23 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$ *b)* $X = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ *c)* $X = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ *d)* $X = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Odp 4.10. *a, b, c, d)* 2 *e, f, g, h)* 3

Odp 4.11.

a) $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}$ *b)* $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -\frac{1}{3} \\ -\frac{5}{3} \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{3} \\ -3 \\ -\frac{2}{3} \end{bmatrix}$ *d)* $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}$

e) brak rozwiązania *f)* $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$

g) $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{18}{7} \\ -\frac{13}{7} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{1}{7} \\ \frac{19}{7} \\ 1 \end{bmatrix} z; \quad z \in \mathbb{R}$ *h) brak rozwiązania*

i) $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ *j)* $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} z; \quad z \in \mathbb{R}$

k) $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{5}{7} \\ \frac{11}{7} \\ 1 \end{bmatrix} z; \quad z \in \mathbb{R}$ *l)* $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Odp 4.12.

a) $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ *b) brak rozwiązania*

c) $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} z; \quad z \in \mathbb{R}$ *d) brak rozwiązania*

e) $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ 5 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u; \quad z, u \in \mathbb{R}$ *f)* $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Odp 4.13. $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ 5 \\ 15 \end{bmatrix}$

5 Elementy teorii grup

Zadanie 5.1. *Czy następujące działania są działaniami wewnętrznymi? Uzasadnij odpowiedź.*

a) *dodawanie w zbiorze* $\{0, 1\}$

b) *mnożenie w zbiorze* $\{i, -i, 1, -1\}$

c) *dodawanie wektorów na płaszczyźnie*

d) *iloczyn skalarny wektorów*

Zadanie 5.2. *Czy działania są wewnętrznymi w podanych zbiorach?*
W przypadku odpowiedzi negatywnej podaj kontrprzykład.

	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{C}$	$\mathbb{N}\setminus\{0\}$	$\mathbb{Z}\setminus\{0\}$	$\mathbb{Q}\setminus\{0\}$	$\mathbb{R}\setminus\{0\}$	$\mathbb{C}\setminus\{0\}$
$+$											
$-$											
$\cdot$											
$\div$											

Zadanie 5.3. *Które z podanych zbiorów z działaniami są grupami? Uzasadnij odpowiedź.*
Czy podane działanie jest przemienne?

a) $\langle \mathbb{N}, + \rangle$

b) $\langle \mathbb{N}, \cdot \rangle$

c) $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$

d) $\langle \mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot \rangle$

e) $\langle \{-1, 0, 1\}, + \rangle$

f) $\langle \{-1, 1, i, -i\}, \cdot \rangle$

g) $\langle \{1, 2\}, \cdot \rangle$

h) $\left\langle \left\{ 5^k \colon k \in \mathbb{Z} \right\}, \cdot \right\rangle$

i) $\left\langle \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} : a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, b \in \mathbb{R} \right\}, \cdot \right\rangle$

Zadanie 5.4. *Czy podany zbiór z określonym w nim działaniem jest grupą? Uzasadnij odpowiedź.*
W każdym przykładzie sprawdź, czy działanie jest przemienne.

a) $\langle \mathbb{R} \setminus \{-1\}, \oplus \rangle$*, gdzie* $a \oplus b = a + b + ab$

b) $\langle \mathbb{Q}, \oslash \rangle$*, gdzie* $a \oslash b = \frac{a+b}{2}$

c) $\langle \mathbb{R}, \odot \rangle$*, gdzie* $a \odot b = a + b + 1$

d) $\langle (1, \infty), * \rangle$*, gdzie* $a * b = ab - a - b + 2$

e) $\langle \{(a, b) : a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, b \in \mathbb{R}\}, \otimes \rangle$*, gdzie* $(a, b) \otimes (c, d) = (ac, ad + b)$

Zadanie 5.5. *Wykaż budując tabelkę działań, że podany zbiór z określonym w nim działaniem jest grupą. Czy jest to grupa abelowa?*

a) $\langle \mathbb{Z}_4, +_4 \rangle$

b) $\langle \mathbb{Z}_9, +_9 \rangle$

c) $\langle \{f_1, f_2, f_3, f_4\} : x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \circ \rangle$, *gdzie*
$f_1(x) = x, \quad f_2(x) = -x, \quad f_3(x) = \frac{1}{x}, \quad f_4(x) = -\frac{1}{x}$

d) zbiór obrotów kwadratu względem jego środka o kąty $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3}{2}\pi$ *ze składaniem przekształceń*

e) zbiór wszystkich izometrii własnych trójkąta równobocznego (tj. obroty względem jego środka o kąty $0, \frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi$ *oraz symetrie osiowe) ze składaniem przekształceń*

Zadanie 5.6. *Czy podane odwzorowania są homomorfizmami?*
Które spośród nich są monomorfizmami, epimorfizmami, izomorfizmami?

a) $f\colon \langle \mathbb{Z}, + \rangle \to \langle \mathbb{Z}, + \rangle$, *gdzie* $f(x) = -x$

b) $g\colon \langle \mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot \rangle \to \langle \mathbb{R}, + \rangle$, *gdzie* $g(x) = 2x$

c) $h\colon \langle \mathbb{Z}, + \rangle \to \langle \mathbb{Z}, + \rangle$, *gdzie* $h(x) = x^2$

d) $\phi\colon \langle \mathbb{Z}, + \rangle \to \langle \{i, -i, 1, -1\}, \cdot \rangle$, *gdzie* $\phi(x) = i^{\,x}$

e) $\varphi\colon \langle M(2, \mathbb{R}), + \rangle \to \langle \mathbb{R}, + \rangle$, *gdzie* $\varphi(A) = tr\ A$

f) $\psi\colon \langle M(2, \mathbb{R}), + \rangle \to \langle \mathbb{R}, + \rangle$, *gdzie* $\psi(A) = det\ A$

Wskazówki i odpowiedzi

Odp 5.1.

a) *nie, bo* $2 \notin \{0, 1\}$

b) *tak, bo mnożąc jakiegolwiek dwa elementy otrzymujemy element z podanego zbioru*

c) *tak, bo suma wektorów jest wektorem*

d) *nie, bo iloczyn skalarny jest liczbą*

Odp 5.2.

	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{C}$	$\mathbb{N}\setminus\{0\}$	$\mathbb{Z}\setminus\{0\}$	$\mathbb{Q}\setminus\{0\}$	$\mathbb{R}\setminus\{0\}$	$\mathbb{C}\setminus\{0\}$
$+$	t	t	t	n	t	t	t	n	n	n	n
$-$	n	t	t	n	t	t	n	n	n	n	n
$\cdot$	t	t	t	n	t	t	t	t	t	t	t
$\div$ n	n	n	n	n	n	n	n	n	t	t	t

Odp 5.3.

a) *działanie jest wewnętrzne, łączne i przemienne,* $e = 0$, *nie istnieje element odwrotny dla każdego elementu - nie jest grupą*

b) *działanie jest wewnętrzne, łączne i przemienne,* $e = 1$, *nie istnieje element odwrotny dla każdego elementu - nie jest grupą*

c) *działanie jest wewnętrzne, łączne i przemienne,* $e = 0$, $a^{'} = -a$ $a \in \mathbb{Z}$ *- jest grupą*

d) *działanie jest wewnętrzne, łączne i przemienne,* $e = 1$, $a^{'} = \frac{1}{a}$ $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ *- jest grupą*

e) *działanie jest łączne i przemienne, ale nie jest wewnętrzne,* $e = 0$, *elementy odwrotne* $-1^{'} = 1$, $0^{'} = 0$, $1^{'} = -1$ *- nie jest grupą*

f) *działanie jest wewnętrzne, łączne i przemienne,* $e = 1$, *elementy odwrotne* $-1^{'} = -1$, $1^{'} = 1$, $-i^{'} = i$, $i^{'} = -i$ *- jest grupą*

g) *działanie jest łączne i przemienne, ale nie jest wewnętrzne,* $e = 1$, *nie istnieje element odwrotny dla każdego elementu - nie jest grupą*

h) *działanie jest wewnętrzne, łączne i przemienne,* $e = 5^0 = 1$, $a^{'} = 5^{-k}$ $k \in \mathbb{Z}$ *- jest grupą*

i) *działanie jest wewnętrzne, łączne, ale nie jest przemienne,*
$e = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$, $A^{'} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a} & -\frac{b}{a} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, b \in \mathbb{R}$ *- jest grupą*

Odp 5.4.

a) *działanie jest wewnętrzne, łączne i przemienne,* $e = 0$, $a^{'} = -\frac{a}{a+1}$ $a \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}$ *- jest grupą*

b) *działanie jest wewnętrzne i przemienne, ale nie jest łaczne, nie istnieje element neutralny ani odwrotny - nie jest grupą*

c) *działanie jest wewnętrzne, łączne i przemienne,* $e = -1$, $a^{'} = -a - 2$ $a \in \mathbb{R}$ *- jest grupą*

d) *działanie jest wewnętrzne, łączne i przemienne,* $e = 2$, $a^{'} = \frac{a}{a-1}$ $a \in (1; +\infty)$ *- jest grupą*

e) działanie jest wewnętrzne, łączne, ale nie jest przemienne,
$(e_1, e_2) = (1, 0)$, $\left(a^{'}, b^{'}\right) = \left(\frac{1}{a}, -\frac{b}{a}\right)$ $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, b \in \mathbb{R}$ *- jest grupą*

Odp 5.5.

a) działanie jest wewnętrzne, łączne i przemienne, $e = 0$, *elementy odwrotne* $0^{'} = 0$, $1^{'} = 3$, $2^{'} = 2$, $3^{'} = 1$ *- grupa abelowa*

b) działanie jest wewnętrzne, łączne i przemienne, $e = 0$, *elementy odwrotne* $0^{'} = 0$, $1^{'} = 8$, $2^{'} = 7$, $3^{'} = 6$, $4^{'} = 5$, $5^{'} = 4$, $6^{'} = 3$, $7^{'} = 2$, $8^{'} = 1$ *- grupa abelowa*

c) działanie jest wewnętrzne, łączne i przemienne, $e = f_1$, *elementy odwrotne* $f_1^{-1} = f_1$, $f_2^{-1} = f_2$, $f_3^{-1} = f_3$, $f_4^{-1} = f_4$ *- grupa abelowa*

d) działanie jest wewnętrzne, łączne i przemienne, $e = \mathcal{O}_0$, *elementy odwrotne* $\mathcal{O}_0^{-1} = \mathcal{O}_0$, $\mathcal{O}_{\frac{\pi}{2}}^{-1} = \mathcal{O}_{\frac{3}{2}\pi}$, $\mathcal{O}_{\pi}^{-1} = \mathcal{O}_{\pi}$, $\mathcal{O}_{\frac{3}{2}\pi}^{-1} = \mathcal{O}_{\frac{\pi}{2}}$ *- grupa abelowa*

e) działanie jest wewnętrzne, łączne, ale nie jest przemienne, $e = \mathcal{O}_0$, *elementy odwrotne* $\mathcal{O}_0^{-1} = \mathcal{O}_0$, $\mathcal{O}_{\frac{2}{3}\pi}^{-1} = \mathcal{O}_{\frac{4}{3}\pi}$, $\mathcal{O}_{\frac{4}{3}\pi}^{-1} = \mathcal{O}_{\frac{2}{3}\pi}$, $\mathcal{S}_A^{-1} = \mathcal{S}_A$, $\mathcal{S}_B^{-1} = \mathcal{S}_B$, $\mathcal{S}_C^{-1} = \mathcal{S}_C$ *- nie jest grupą abelową*

Odp 5.6.

a) homomorfizm, monomorfizm, epimorfizm, izomorfizm

b) nie jest homomorfizmem

c) nie jest homomorfizmem

d) homomorfizm, epimorfizm

e) homomorfizm, epimorfizm

f) nie jest homomorfizmem

6 Zbiór liczb rzeczywistych

Zadanie 6.1. *Wykreśl wykresy funkcji:*

a) wartość bezwzględna $f\colon \mathbb{R} \to \langle 0, \infty)$ $\quad f(x) = |x| = \begin{cases} x & x \geqslant 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$

b) signum $f\colon \mathbb{R} \to \{-1, 0, 1\}$ $\quad f(x) = sgn(x) = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$

c) część całkowita $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ $\quad f(x) = [x] = max\{k \in \mathbb{Z}\colon k \leqslant x\}$

d) część ułamkowa $f\colon \mathbb{R} \to \langle 0, 1)$ $\quad f(x) = x - [x]$

Zadanie 6.2. *Dla danej funkcji* $f\colon D \to \mathbb{R}$*:*

1. *określ dziedzinę* D *i wykreśl wykres*
2. *podaj punkty przecięcia wykresu funkcji z osią* OX *oraz* OY *(jeśli istnieją)*
3. *podaj przedziały monotoniczności funkcji*
4. *czy funkcja jest parzysta, czy nieparzysta?*
5. *czy funkcja jest surjekcją, injekcją, bijekcją?*
6. *wyznacz funkcję odwrotną (jeśli istnieje) i wykreśl jej wykres*

a) $f(x) = 3$ *b)* $f(x) = 2x - 4$ *c)* $f(x) = x^2 - 3x + 2$

d) $f(x) = \frac{1}{x}$ *e)* $f(x) = x^{-3}$ *f)* $f(x) = x^{-2}$

g) $f(x) = x^3$ *h)* $f(x) = x^4$ *i)* $f(x) = x^{\frac{1}{2}}$

j) $f(x) = x^{-\frac{1}{2}}$ *k)* $f(x) = 2^x$ *l)* $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

ł) $f(x) = \log_2 x$ *m)* $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$ *n)* $f(x) = \sin x$

o) $f(x) = \cos x$ *p)* $f(x) = \operatorname{tg} x$ *r)* $f(x) = \operatorname{ctg} x$

Zadanie 6.3. *Wykonaj złożenia funkcji* $f \circ g$ *oraz* $g \circ f$ *oraz wykreśl wykresy otrzymanych funkcji:*

a) $f(x) = x^2 - 4 \quad g(x) = -x$ *b)* $f(x) = \frac{1}{x} \quad g(x) = x^2$

c) $f(x) = x^2 + 1 \quad g(x) = 2|x|$ *d)* $f(x) = x - 2 \quad g(x) = |x| + 1$

e) $f(x) = -x \quad g(x) = [x]$ *f)* $f(x) = sgn(x) \quad g(x) = [x]$

g) $f(x) = sgn(x) \quad g(x) = \sin x$ *h)* $f(x) = \log_2 x \quad g(x) = |x|$

Zadanie 6.4. *Czy podane zbiory są ograniczone z dołu, z góry, czy są ograniczone? Znajdź kresy dolne i górne podanych zbiorów. Czy istnieje minimum oraz maksimum zbioru?*

a) $A = \mathbb{N}$

b) $A = \mathbb{R} \setminus \mathbb{R}_+$

c) $A = \left\{x \in \mathbb{R} : x^2 - 3x + 2 = 0\right\}$

d) $A = \{x \in \mathbb{R} : |2x - 5| - 1 = 0\}$

e) $A = (0, 3) \cup \{5\}$

f) $A = \{-1\} \cup (0, 1\rangle$

g) $A = (-\infty, 3)$

h) $A = \langle 5, \infty)$

i) $A = \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}_+\right\}$

j) $A = \left\{\frac{4}{n^2} : n \in \mathbb{N}_+\right\}$

k) $A = \left\{\frac{n^2+1}{2n+3} : n \in \mathbb{N}\right\}$

l) $A = \left\{\frac{1}{n} + n : n \in \mathbb{N}_+\right\}$

ł) $A = \left\{\frac{1}{n} + k : k \in \{0, 1, 2\} \wedge n \in \mathbb{N}_+\right\}$

m) $A = \{2^z : z \in \mathbb{Z}\}$

n) $A = \left\{\left(1 - \frac{1}{n}\right)(-1)^n : n \in \mathbb{N}_+\right\}$

o) $A = \{(-1)^n n : n \in \mathbb{N}\}$

p) $A = \left\{\left(\frac{1}{2}\right)^n - 2 : n \in \mathbb{N}\right\}$

r) $A = \left\{1 + \frac{(-1)^n}{n} : n \in \mathbb{N}_+\right\}$

Zadanie 6.5. *Wykreśl wykresy podanych funkcji i zbadaj czy są ograniczone z dołu, z góry, czy są ograniczone. Znajdź kres dolny i górny funkcji.*

a) $f(x) = -x + 4 \quad \text{dla } x \in \langle 1, 3)$

b) $f(x) = \frac{1}{x-1}$

c) $f(x) = (x + 1)^{-3}$

d) $f(x) = x^{-2} + 2$

e) $f(x) = x^3 \quad \text{dla } x \in (-2, 2\rangle$

f) $f(x) = x^4 \quad \text{dla } x \in (-\infty, 1)$

g) $f(x) = (x - 1)^{\frac{1}{2}} - 2$

h) $f(x) = -2(x + 1)^{-\frac{1}{2}}$

i) $f(x) = 3^{x+1}$

j) $f(x) = -\left(\frac{1}{4}\right)^x$

k) $f(x) = \log_3 x \quad \text{dla } x \in (0, 9\rangle$

l) $f(x) = \log_{\frac{1}{3}} x \quad \text{dla } x \in (0, 9)$

ł) $f(x) = \sin x + 2$

m) $f(x) = |\cos 2x|$

n) $f(x) = \operatorname{tg} x \quad \text{dla } x \in \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right\rangle$

o) $f(x) = |\operatorname{ctg} x| \quad \text{dla } x \in (0, \pi)$

Wskazówki i odpowiedzi

Odp 6.1. *Patrz Ćwiczenia.*

Odp 6.2.

1a) $D = \mathbb{R}$

2a) OX - *brak przecięcia;* OY - $P(0,3)$

3a) *stała dla* $x \in \mathbb{R}$

4a) *parzysta*

5a) *nie jest surjekcją, injekcją, bijekcją*

6a) *nie istnieje funkcja odwrotna*

1b) $D = \mathbb{R}$

2b) OX - $P(2,0)$ *;* OY - $P(0,-4)$

3b) *rosnąca dla* $x \in \mathbb{R}$

4b) *ani parzysta ani nieparzysta*

5b) *surjekcja, injekcja, bijekcja*

6b) $f^{-1} \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *gdzie* $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x + 2$

1c) $D = \mathbb{R}$

2c) OX - $P(2,0)$ *;* OY - $P(0,2)$

3c) *malejąca dla* $x \in \left(-\infty; \frac{3}{2}\right)$ *; rosnąca dla* $x \in \left(\frac{3}{2}; +\infty\right)$

4c) *ani parzysta ani nieparzysta*

5a) *nie jest surjekcją, injekcją, bijekcją*

6a) *nie istnieje funkcja odwrotna*

1d,e) $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

2d,e) OX, OY - *brak przecięcia*

3d,e) *malejąca dla* $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

4d,e) *nieparzysta*

5d,e) *nie jest surjekcją, jest injekcją, nie jest bijekcją*

6d,e) *nie istnieje funkcja odwrotna*

1f) $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

2f) OX, OY - *brak przecięcia*

3f) malejąca dla $x \in \mathbb{R}_+$ *; rosnąca dla* $x \in \mathbb{R}_-$

4f) parzysta

5f) nie jest surjekcją, injekcją, bijekcją

6f) nie istnieje funkcja odwrotna

1g) $D = \mathbb{R}$

2g) $OX,\ OY$ - $P\left(0,0\right)$

3g) rosnąca dla $x \in \mathbb{R}$

4g) nieparzysta

5g) surjekcja, injekcja, bijekcja

6g) $f^{-1}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *gdzie* $f^{-1}\left(x\right) = x^{\frac{1}{3}}$

1h) $D = \mathbb{R}$

2h) $OX,\ OY$ - $P\left(0,0\right)$

3h) malejąca dla $x \in \mathbb{R}_-$ *; rosnąca dla* $x \in \mathbb{R}_+$

4h) parzysta

5h) nie jest surjekcją, injekcją, bijekcją

6h) nie istnieje funkcja odwrotna

1i) $D = \langle 0; +\infty)$

2i) $OX,\ OY$ - $P\left(0,0\right)$

3i) rosnąca dla $x \in \mathbb{R}_+$

4i) ani parzysta ani nieparzysta

5i) nie jest surjekcją, jest injekcją, nie jest bijekcją

6i) nie istnieje funkcja odwrotna

1j) $D = \mathbb{R}_+$

2j) $OX,\ OY$ - *brak przecięcia*

3j) malejąca dla $x \in \mathbb{R}_+$

4j) ani parzysta ani nieparzysta

5j) nie jest surjekcją, jest injekcją, nie jest bijekcją

6j) nie istnieje funkcja odwrotna

1k) $D = \mathbb{R}$

2k) *OX - brak przecięcia; OY -* $P(0, 1)$

3k) *rosnąca dla* $x \in \mathbb{R}$

4k) *ani parzysta ani nieparzysta*

5k) *nie jest surjekcją, jest injekcją, nie jest bijekcją*

6k) *nie istnieje funkcja odwrotna*

1l) $D = \mathbb{R}$

2l) *OX - brak przecięcia; OY -* $P(0, 1)$

3l) *malejąca dla* $x \in \mathbb{R}$

4l) *ani parzysta ani nieparzysta*

5l) *nie jest surjekcją, jest injekcją, nie jest bijekcją*

6l) *nie istnieje funkcja odwrotna*

1ł) $D = \mathbb{R}_+$

2ł) *OX -* $P(1, 0)$*; OY - brak przecięcia*

3ł) *rosnąca dla* $x \in \mathbb{R}_+$

4ł) *ani parzysta ani nieparzysta*

5ł) *surjekcja, injekcja, bijekcja*

6ł) $f^{-1} \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$*, gdzie* $f^{-1}(x) = 2^x$

1m) $D = \mathbb{R}_+$

2m) *OX -* $P(1, 0)$*; OY - brak przecięcia*

3m) *malejąca dla* $x \in \mathbb{R}_+$

4m) *ani parzysta ani nieparzysta*

5m) *surjekcja, injekcja, bijekcja*

6m) $f^{-1} \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$*, gdzie* $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}^x$

1n) $D = \mathbb{R}$

2n) *OX -* $P(k\pi, 0)$ $k \in \mathbb{Z}$*; OY -* $P(0, 0)$

3n) *malejąca dla* $x \in \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{3}{2}\pi + 2k\pi\right)$ *; rosnąca dla* $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$

4n) *nieparzysta*

5n) *nie jest surjekcją, injekcją, bijekcją*

6n) nie istnieje funkcja odwrotna

1o) $D=\mathbb{R}$

2o) OX *-* $P\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi,0\right)$ $k\in\mathbb{Z}$*;* OY *-* $P\left(0,1\right)$

3o) malejąca dla $x\in(2k\pi;\pi+2k\pi)$ *; rosnąca dla* $x\in(\pi+2k\pi;2\pi+2k\pi)$

4o) parzysta

5o) nie jest surjekcją, injekcją, bijekcją

6o) nie istnieje funkcja odwrotna

1p) $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi\right\}$ $k\in\mathbb{Z}$

2p) OX *-* $P\left(k\pi,0\right)$*;* OY *-* $P\left(0,0\right)$

3p) rosnąca dla $x\in\left(-\frac{\pi}{2}+k\pi;\frac{\pi}{2}+k\pi\right)$

4p) nieparzysta

5p) surjekcja, nie jest injekcją, nie jest bijekcją

6p) nie istnieje funkcja odwrotna

1r) $D=\mathbb{R}\setminus\{k\pi\}$ $k\in\mathbb{Z}$

2r) OX *-* $P\left(\frac{\pi}{2}+k\pi,0\right)$*;* OY *- brak przecięcia*

3r) malejąca dla $x\in(k\pi;\pi+k\pi)$

4r) nieparzysta

5r) surjekcja, nie jest injekcją, nie jest bijekcją

6r) nie istnieje funkcja odwrotna

Odp 6.3.

a) $(f\circ g)(x)=x^2-4$ $x\in\mathbb{R}$ $\quad$ $(g\circ f)(x)=-x^2+4$ $x\in\mathbb{R}$

b) $(f\circ g)(x)=\frac{1}{x^2}$ $x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ $\quad$ $(g\circ f)(x)=\frac{1}{x^2}$ $x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$

c) $(f\circ g)(x)=4x^2+1$ $x\in\mathbb{R}$ $\quad$ $(g\circ f)(x)=2\left|x^2+1\right|$ $x\in\mathbb{R}$

d) $(f\circ g)(x)=|x|-1$ $x\in\mathbb{R}$ $\quad$ $(g\circ f)(x)=|x-2|+1$ $x\in\mathbb{R}$

e) $(f\circ g)(x)=-[x]$ $x\in\mathbb{R}$ $\quad$ $(g\circ f)(x)=[-x]$ $x\in\mathbb{R}$

f) $(f\circ g)(x)=sgn\,[x]$ $x\in\mathbb{R}$ $\quad$ $(g\circ f)(x)=[sgn\,(x)]$ $x\in\mathbb{R}$

g) $(f\circ g)(x)=sgn\,(\sin x)$ $x\in\mathbb{R}$ $\quad$ $(g\circ f)(x)=\sin\left(sgn\,(x)\right)$ $x\in\mathbb{R}$

h) $(f\circ g)(x)=\log_2|x|$ $x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ $\quad$ $(g\circ f)(x)=|\log_2 x|$ $x\in\mathbb{R}_+$

Odp 6.4.

a) *ograniczony z dołu, nieograniczony z góry, nieograniczony*
$\inf A = 0$, $\sup A = +\infty$, $\min A = 0$, $\max A$ *nie istnieje*

b) *nieograniczony z dołu, ograniczony z góry, nieograniczony*
$\inf A = -\infty$, $\sup A = 0$, $\min A$ *nie istnieje,* $\max A = 0$

c) *ograniczony z dołu i z góry, ograniczony*
$\inf A = 1$, $\sup A = 2$, $\min A = 1$, $\max A = 2$

d) *ograniczony z dołu i z góry, ograniczony*
$\inf A = 2$, $\sup A = 3$, $\min A = 2$, $\max A = 3$

e) *ograniczony z dołu i z góry, ograniczony*
$\inf A = 0$, $\sup A = 5$, $\min A$ *nie istnieje,* $\max A = 5$

f) *ograniczony z dołu i z góry, ograniczony*
$\inf A = -1$, $\sup A = 1$, $\min A = -1$, $\max A = 1$

g) *nieograniczony z dołu, ograniczony z góry, nieograniczony*
$\inf A = -\infty$, $\sup A = 3$, $\min A$ *i* $\max A$ *nie istnieje*

h) *ograniczony z dołu, nieograniczony z góry, nieograniczony*
$\inf A = 5$, $\sup A = +\infty$, $\min A = 5$, $\max A$ *nie istnieje*

i) *ograniczony z dołu i z góry, ograniczony*
$\inf A = 0$, $\sup A = 1$, $\min A$ *nie istnieje,* $\max A = 1$

j) *ograniczony z dołu i z góry, ograniczony*
$\inf A = 0$, $\sup A = 4$, $\min A$ *nie istnieje,* $\max A = 4$

k) *ograniczony z dołu, nieograniczony z góry, nieograniczony*
$\inf A = \frac{1}{3}$, $\sup A = +\infty$, $\min A = \frac{1}{3}$, $\max A$ *nie istnieje*

l) *ograniczony z dołu, nieograniczony z góry, nieograniczony*
$\inf A = 2$, $\sup A = +\infty$, $\min A = 2$, $\max A$ *nie istnieje*

ł) *ograniczony z dołu i z góry, ograniczony*
$\inf A = 0$, $\sup A = 3$, $\min A$ *nie istnieje,* $\max A = 3$

m) *ograniczony z dołu, nieograniczony z góry, nieograniczony*
$\inf A = 0$, $\sup A = +\infty$, $\min A$ *i* $\max A$ *nie istnieje*

n) *ograniczony z dołu i z góry, ograniczony*
$\inf A = -1$, $\sup A = 1$, $\min A$ *i* $\max A$ *nie istnieje*

o) *nieograniczony z dołu i z góry, nieograniczony*
$\inf A = -\infty$, $\sup A = +\infty$, $\min A$ *i* $\max A$ *nie istnieje*

p) *ograniczony z dołu i z góry, ograniczony*
$\inf A = -2$, $\sup A = -1$, $\min A$ *nie istnieje,* $\max A = -1$

r) *ograniczony z dołu i góry, ograniczony*
$\inf A = 0$, $\sup A = \frac{3}{2}$, $\min A = 0$, $\max A = \frac{3}{2}$

Odp 6.5.

a) *ograniczona z dołu i z góry, ograniczona,* $\inf f(x) = 3$, $\sup f(x) = 3$

b) *nieograniczona z dołu i z góry, nieograniczona,* $\inf f(x) = -\infty$, $\sup f(x) = +\infty$

c) *nieograniczona z dołu i z góry, nieograniczona,* $\inf f(x) = -\infty$, $\sup f(x) = +\infty$

d) *ograniczona z dołu, nieograniczona z góry, nieograniczona,* $\inf f(x) = 2$, $\sup f(x) = +\infty$

e) *ograniczona z dołu i z góry, ograniczona,* $\inf f(x) = -8$, $\sup f(x) = 8$

f) *ograniczona z dołu, nieograniczona z góry, nieograniczona,* $\inf f(x) = 0$, $\sup f(x) = +\infty$

g) *ograniczona z dołu, nieograniczona z góry, nieograniczona,* $\inf f(x) = -2$, $\sup f(x) = +\infty$

h) *nieograniczona z dołu, ograniczona z góry, nieograniczona,* $\inf f(x) = -\infty$, $\sup f(x) = 0$

i) *ograniczona z dołu, nieograniczona z góry, nieograniczona,* $\inf f(x) = 0$, $\sup f(x) = +\infty$

j) *nieograniczona z dołu, ograniczona z góry, nieograniczona,* $\inf f(x) = -\infty$, $\sup f(x) = 0$

k) *nieograniczona z dołu, ograniczona z góry, nieograniczona,* $\inf f(x) = -\infty$, $\sup f(x) = 2$

l) *ograniczona z dołu, nieograniczona z góry, nieograniczona,* $\inf f(x) = -2$, $\sup f(x) = +\infty$

ł) *ograniczona z dołu i z góry, ograniczona,* $\inf f(x) = 1$, $\sup f(x) = 3$

m) *ograniczona z dołu i z góry, ograniczona,* $\inf f(x) = 0$, $\sup f(x) = 1$

n) *ograniczona z dołu i z góry, ograniczona,* $\inf f(x) = -1$, $\sup f(x) = 1$

o) *ograniczona z dołu, nieograniczona z góry, nieograniczona,* $\inf f(x) = 0$, $\sup f(x) = +\infty$

7 Ciągi liczbowe

Zadanie 7.1. *Korzystając z definicji wykaż, że:*

a) $\lim_{n\to\infty} \frac{5n-1}{7n+2} = \frac{5}{7}$

b) $\lim_{n\to\infty} \frac{8-9n}{3n} = -3$

c) $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{3\sqrt{n+1}} = \frac{1}{3}$

d) $\lim_{n\to\infty} \frac{2n}{n^3+1} = 0$

e) $\lim_{n\to\infty} \left(n^2+4\right) = +\infty$

f) $\lim_{n\to\infty} \frac{-n^4+1}{n^2+1} = -\infty$

g) $\lim_{n\to\infty} \frac{7-2ni}{6n} = -\frac{1}{3}i$

h) $\lim_{n\to\infty} \frac{3n^3+2i}{n^4+ni} = 0$

i) $\lim_{n\to\infty} \frac{1+10n^2 i}{2n^2+i} = 5i$

j) $\lim_{n\to\infty} \frac{2n+4ni+6i}{n-3i} = 2+4i$

Zadanie 7.2. *Oblicz granicę ciągu o wyrazie ogólnym:*

a) $a_n = 5 - 3n - \frac{1}{2}n^2 + 4n^3$

b) $a_n = -3n^4 + 2n^2 + n - 8$

c) $a_n = \frac{2-5n-10n^2}{3n+5\sqrt{n}}$

d) $a_n = \frac{\left(-\frac{2}{3}\right)^n+1}{12+2\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)^n}$

e) $a_n = \sqrt[3]{n^3+4n^2} - n$

f) $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

g) $a_n = \sqrt{2n^2+3} - \sqrt{2n^2+n+4}$

h) $a_n = \frac{3^{n+1}-4^{n+2}}{2\cdot 4^{n+2}}$

i) $a_n = \frac{49^{n-1}+5}{2\cdot 7^{2n+1}-2}$

j) $a_n = \frac{27^{\log_3 n}}{16^{\log_2 n}}$

k) $a_n = \frac{9^{\log_3 n}}{4^{\log_2 n}}$

l) $a_n = \frac{1+2+3+\ldots+n}{n^2}$

ł) $a_n = \frac{1+2-3+4+5-6+7+8-9+\ldots-3n}{n^2+n+1}$

m) $a_n = \sqrt[n]{3n^8-5n^5+n^4+2n+3}$

n) $a_n = \frac{-6}{n\sqrt[n]{2n^5-3n^2-4}}$

o) $a_n = \sqrt[n]{3n+\sin n}$

p) $a_n = \frac{7n^2-n\cdot\sin 5n-1}{n^2}$

r) $a_n = \frac{5^{n+2}}{9\cdot n!}$

s) $a_n = \frac{(4n)^n}{n!}$

t) $a_n = \left(\frac{n^4+3}{n^4}\right)^{n^4}$

u) $a_n = \left(\frac{n^3}{n^3+2}\right)^{4n^3}$

w) $a_n = \left(\frac{n+1}{n-2}\right)^{2n-1}$

x) $a_n = \left(\frac{4n-1}{4n+1}\right)^{n+2}$

y) $a_n = n \cdot \ln\left(1+\frac{5}{7n}\right)$

z) $a_n = n \cdot (\ln(n+1) - \ln n)$

$\alpha)$ $a_n = \frac{4n+n^5 i}{5n^5-2i}$ $\beta)$ $a_n = \frac{3n+i}{5n-4n^2 i}$

$\gamma)$ $a_n = \frac{6n-7ni+8i}{n+4-2ni}$ $\delta)$ $a_n = \frac{4+2n^2+5ni}{1-4n+n^2-n^2 i}$

$\epsilon)$ $a_n = \frac{e^{3n}-ie^n}{e^{3n}+4ie^{2n}}$ $\zeta)$ $a_n = \frac{n^2 \cos\frac{1}{n}+2n^3 i \sin\frac{\pi}{2n}}{n^2-i}$

Zadanie 7.3. *Korzystając z twierdzenia o trzech ciągach oblicz granicę ciągu o wyrazie ogólnym:*

a) $a_n = \sqrt[n]{9^n + 8^n + 5^n + 6^n}$

b) $a_n = \sqrt[n]{\left(\frac{2}{3}\right)^n + \left(\frac{1}{4}\right)^n + \left(\frac{3}{5}\right)^n}$

c) $a_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$

d) $a_n = \frac{1}{n^2+1} + \frac{1}{n^2+2} + \ldots + \frac{1}{n^2+n}$

e) $a_n = \frac{1}{n^2} \cdot \cos 2^n$

f) $a_n = \frac{2n^4}{3n^5+1} \cdot \operatorname{arc\,tg} n$

Zadanie 7.4. *Po zamknięciu obwodu elektrycznego, zawierającego oporność czynną oraz indukcyjność, natężenie prądu zmienia się według równania* $i = 15\left(1 - e^{-2t}\right)$*. Oblicz natężenie prądu w chwili* $t = 0$ *oraz graniczną wartość natężenia przy* $t \to \infty$*.*

Zadanie 7.5. *Liczba jednostek populacji* $N(t)$ *w chwili* t *dana jest wzorem* $N(t) = N_0 \frac{e^{3t}}{\frac{3}{2}+e^{3t}}$*, gdzie* N_0 *jest stanem równowagi. Wyznacz* $\lim_{t\to\infty} N(t)$ *i spróbuj zinterpretować wynik.*

Zadanie 7.6. *Pewna reakcja chemiczna przebiega w ten sposób, że przyrost ilościowy substancji* Q *w każdym przedziale czasu* τ *jest proporcjonalny do długości przedziału i do początkowej ilości materii znajdującej się w początku tego przedziału. Zakładając, że w chwili rozpoczęcia reakcji ilość substancji wynosiła* Q_0*, określ jej ilość* $Q_t^{(n)}$ *po upływie czasu* t*, jeżeli* $\tau = \frac{t}{n}$*.*
Znajdź $Q_t = \lim_{n\to\infty} Q_t^{(n)}$*.*

Wskazówki i odpowiedzi

Odp 7.1. *Przykładowe odpowiedzi:*

a) $N(\epsilon) = \left[\frac{17}{49\epsilon} - \frac{2}{7}\right] + 1$	b) $N(\epsilon) = \left[\frac{8}{3\epsilon}\right] + 1$
c) $N(\epsilon) = \left[\frac{1}{3\epsilon} - 2\right] + 1$	d) $N(\epsilon) = \left[\sqrt{\frac{2}{\epsilon}}\right] + 1$
e) $N(K) = \left[\sqrt{K-4}\right] + 1 \ K \geqslant 4$	f) $N(K) = \left[\sqrt{K+1}\right] + 1$
g) $N(\epsilon) = \left[\frac{7}{6\epsilon}\right] + 1$	h) $N(\epsilon) = \left[\frac{3}{\epsilon}\right] + 1$
i) $N(\epsilon) = \left[\sqrt{3\epsilon}\right] + 1$	j) $N(\epsilon) = \left[\frac{12\sqrt{2}}{\epsilon}\right] + 1$

Odp 7.2.

a) $+\infty$	b) $-\infty$	c) $-\infty$	d) $\frac{1}{12}$	e) $\frac{4}{3}$	f) 0	g) $-\frac{\sqrt{2}}{4}$	h) $-\frac{1}{2}$
i) $\frac{1}{2\cdot 7^3}$	j) 0	k) 1	l) $\frac{1}{2}$	ł) $\frac{3}{2}$	m) 1	n) 0	o) 1
p) 2	r) 0	s) $+\infty$	t) e^3	u) e^{-8}	w) e^6	x) $e^{-\frac{1}{2}}$	y) $\frac{5}{7}$
z) 1	α) $\frac{i}{5}$	β) 0	γ) $\frac{6-7i}{1-2i}$	δ) $\frac{2}{1-i}$	ϵ) 1	ζ) $1+\pi i$	

Odp 7.3.

a) 9 b) $\frac{2}{3}$ c) 1 d) 0 e) 0 f) 0

Odp 7.4. $i(0) = 0 \quad \lim_{t\to\infty} 15\left(1 - e^{-2t}\right) = 15$

Odp 7.5. $\lim_{t\to\infty} N(t) = N_0$, *czyli pomimo upływu bardzo długiego okresu czasu liczba jednostek w populacji dąży do stanu równowagi.*

Odp 7.6. $Q_t^{(n)} = Q_0\left(1 + k\frac{t}{n}\right)^n \quad Q_t = Q_0 e^{kt}$

8 Szeregi liczbowe

Zadanie 8.1. *Zbadaj zbieżność szeregu obliczając jego sumę:*

a) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$ b) $\sum_{n=1}^{\infty}1$

c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$ d) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n-\sqrt{n^2-1}}{\sqrt{n(n+1)}}$

e) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{5}\right)^n$ f) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{9^{n+2}}$

g) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+2^n}{6^n}$ h) $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{9}+\frac{1}{18}+\frac{1}{27}+\ldots$

Zadanie 8.2. *Zbadaj zbieżność szeregu korzystając z warunku koniecznego zbieżności szeregu:*

a) $\sum_{n=1}^{\infty}n\sin\frac{1}{\sqrt{n}}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty}n\left(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1}\right)$

c) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n$ d) $\sum_{n=1}^{\infty}\cos\left(\sin\frac{\pi}{n}\right)$

e) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n-1)(n+1)}{n^3+1}$ f) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{2n}$

Zadanie 8.3. *Zbadaj zbieżność szeregu korzystając z kryterium porównawczego zbieżności szeregów:*

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi}{2^n}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n^2+1}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln(n+1)}$ d) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2-4n+5}$

e) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{\sqrt{n^2+2n}}$ f) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[8]{n+1}}{\sqrt[4]{n^5+2}}$

g) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)$ h) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\sin\frac{2+\frac{1}{n}}{n}$

Zadanie 8.4. *Zbadaj zbieżność szeregu korzystając z kryterium ilorazowego d'Alemberta:*

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{n}{4}\right)^n$ b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2n!}{(n+4)!}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty}n\sin\frac{\pi}{2^{n+1}}$ d) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{3^n}$

e) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!5^n}{n^n}$ f) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!e^n}{n^n}$

g) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{\sqrt{n}}}$ h) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{2^n+1}$

Zadanie 8.5. *Zbadaj zbieżność szeregu korzystając z kryterium pierwiastkowego Cauchy'ego:*

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2+n}e^{-n}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n-1}{n+2}\right)^{2n^2-n}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left[2+(-1)^n\right]^n$ d) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{3n-1}\right)^{2n+1}$

e) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln^n(n+1)}$ f) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$

g) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^5}{4^n}\left[2+(-1)^n\right]^n$ h) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n^2}$

Zadanie 8.6. *Zbadaj zbieżność szeregu naprzemiennego:*

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!+1}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \operatorname{tg} \frac{1}{n}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \left(\frac{n}{2n-1}\right)^n$

e) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{(3n-2)^3}$

f) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \ln\left(\frac{n^2+1}{n}\right)$

g) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\frac{2n+1}{3n-1}\right)^n$

h) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2}{\sqrt{n^2+3n+4}}$

Zadanie 8.7. *Zbadaj zbieżność szeregu o wyrazach zespolonych:*

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+i}{2}\right)^n$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} (4+3i)^n$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}+i}$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n(2-i)+1}{n(3-2i)-3i}\right)^n$

e) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2-i}{3}\right)^{n^2}$

f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n + i \sin n}{n^2}$

Wskazówki i odpowiedzi

Odp 8.1.

a) rozbieżny, bo S *nie istnieje* *b) rozbieżny, bo* $S = +\infty$

c) zbieżny, bo $S = 1$ *d) zbieżny, bo* $S = 1$

e) zbieżny, bo $S = \frac{2}{3}$ *f) zbieżny, bo* $S = \frac{1}{648}$

g) zbieżny, bo $S = \frac{3}{2}$ *h) zbieżny, bo* $S = \frac{9}{4}$

Odp 8.2.

a) rozbieżny, bo $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ *b) rozbieżny, bo* $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$

c) rozbieżny, bo $\lim_{n\to\infty} a_n = e$ *d) rozbieżny, bo* $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$

e) przypadek wątpliwy, bo $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ *f) przypadek wątpliwy, bo* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

Odp 8.3.

a) zbieżny, wsk: $\sin x \leqslant x$ *c) rozbieżny, wsk:* $\ln x \leqslant x - 1$ *dla* $x > 0$

b, e) rozbieżny *d, f) zbieżny*

g) zbieżny, wsk: $1 - \cos 2x = 2\sin^2 x$ *h) zbieżny, wsk:* $\sin x \leqslant x$

Odp 8.4.

a) zbieżny, bo $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{e}{4}$ *b) przypadek wątpliwy, bo* $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1$

c) zbieżny, bo $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{1}{2}$ *d) zbieżny, bo* $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{1}{3}$

e) rozbieżny, bo $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{5}{e}$ *f) przypadek wątpliwy, bo* $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1$

g) przypadek wątpliwy, bo $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1$ *h) rozbieżny, bo* $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = +\infty$

Odp 8.5.

a) przypadek wątpliwy, bo $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$ *b) zbieżny, bo* $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = e^{-6}$

c) rozbieżny, bo $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 3$ *d) zbieżny, bo* $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{9}$

e) zbieżny, bo $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0$ *f) zbieżny, bo* $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{e}{3}$

g) zbieżny, bo $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{3}{4}$ *h) rozbieżny, bo* $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{e}{2}$

Odp 8.6.

a) bezwzględnie zbieżny, wsk: kryterium porównawcze i d'Alemberta

b) warunkowo zbieżny, wsk: $\sin x > \frac{2}{\pi}x$*, kryterium porównawcze i Leibniza*

c) warunkowo zbieżny, wsk: kryterium porównawcze i Leibniza

d) bezwzględnie zbieżny, wsk: kryterium Cauchy'ego

e) bezwzględnie zbieżny, wsk: kryterium porównawcze

f) rozbieżny, wsk: warunek konieczny

g) bezwzględnie zbieżny, wsk: kryterium Cauchy'ego

h) warunkowo zbieżny, wsk: kryterium porównawcze i Leibniza

Odp 8.7.

a) bezwzględnie zbieżny z kryterium Cauchy'ego $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

b) rozbieżny z kryterium Cauchy'ego $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{5}{2}$

c) rozbieżny z kryterium porównawczego

d) bezwzględnie zbieżny z kryterium Cauchy'ego $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt{\frac{5}{13}}$

e) bezwzględnie zbieżny z kryterium Cauchy'ego $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0$

f) bezwzględnie zbieżny z kryterium porównawczego

9 Elementy teorii przestrzeni metrycznych

Zadanie 9.1. *Oblicz granice:*

a) $\lim_{x\to -2} \frac{x-1}{x^2+2}$

b) $\lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{\cos x-1}{2x}$

c) $\lim_{x\to 2} \frac{3x^2-5x-2}{5x^2-20}$

d) $\lim_{x\to 4} \frac{x^2-2x-8}{x^2-9x+20}$

e) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+16}-4}$

f) $\lim_{x\to 7} \frac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}$

g) $\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{2x-1}-\sqrt[3]{3x-2}}{\sqrt{4x-3}-1}$

h) $\lim_{x\to \infty} \left(\sqrt{x^2-5x+6}-x\right)$

i) $\lim_{x\to 0} \frac{4x}{3\sin 2x}$

j) $\lim_{x\to 0} \frac{10x}{\operatorname{tg} 3x}$

k) $\lim_{x\to 0} \frac{x+\sin 2x}{2x+\sin 3x}$

l) $\lim_{x\to \pi} \frac{1+\cos x}{\sin^2 x}$

ł) $\lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2x}{\sin x-\cos x}$

m) $\lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x-\cos x}{1-\operatorname{tg} x}$

n) $\lim_{x\to \infty} \left(-2x^3-10x^2+15x-18\right)$

o) $\lim_{x\to -\infty} \left(-3x^4+5x^2-x+15\right)$

p) $\lim_{x\to \infty} \frac{x^2-2x+1}{3x^2+2x-1}$

r) $\lim_{x\to -\infty} \frac{x^3+4x-1}{2x^4-7x^3+3}$

s) $\lim_{x\to \infty} \left(\frac{x+2}{x-3}\right)^{x-1}$

t) $\lim_{x\to \infty} \left(\frac{3x-1}{3x+1}\right)^{2x-5}$

u) $\lim_{x\to 1} \left(\frac{x-1}{x^2-1}\right)^{x+1}$

w) $\lim_{x\to \infty} x\left(\ln(x+1)-\ln x\right)$

y) $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$

z) $\lim_{x\to 1} \frac{4^x-4}{x^2+x-2}$

Zadanie 9.2. *Sprawdź, czy istnieją granice:*

a) $\lim_{x\to -2} \frac{x+2}{|x+2|}$

b) $\lim_{x\to -3} \frac{|x+3|}{x+3}$

c) $\lim_{x\to 0} \frac{x^3-4x^2+5x}{(|x|+1)x}$

d) $\lim_{x\to 2} \frac{[x]-x}{x}$

e) $\lim_{x\to -2} \frac{4+2x}{\sqrt{-2x}-2}$

f) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1-\cos x}}{\sin x}$

g) $\lim_{x\to 1} e^{\frac{1}{1-x^2}}$

h) $\lim_{x\to 0} \frac{2^{\frac{1}{x}}+3}{3^{\frac{1}{x}}+2}$

Zadanie 9.3. *Oblicz granicę:*

a) $\lim_{x\to 0} f(x)$, *gdy* $f(x) = \begin{cases} x-5 & x<0 \\ 2x+5 & x\geqslant 0 \end{cases}$

b) $\lim_{x\to 1} f(x)$, *gdy* $f(x) = \begin{cases} (x-1)^2-1 & x<1 \\ 0 & x=1 \\ x+1 & x>1 \end{cases}$

Zadanie 9.4. *Zbadaj ciągłość funkcji:*

a) $f(x) = \begin{cases} x^2 & x < -1 \\ -\frac{1}{2} & x = -1 \\ x + 1 & -1 < x \leqslant 2 \\ \frac{3}{4}(x-4)^2 & x > 2 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} x & |x| \leqslant 1 \\ \frac{x^3}{3} + \frac{2}{3} & |x| > 1 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \leqslant 1 \\ x^2 [x] & 1 < x \leqslant 2 \\ (x-4)^2 & x > 2 \end{cases}$

Zadanie 9.5. *Znajdź* $a, b \in \mathbb{R}$ *tak, aby dana funkcja była ciągła na* $\mathbb{R}$*:*

a) $f(x) = \begin{cases} x & |x| \leqslant 1 \\ x^2 + ax + b & |x| > 1 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} x + \frac{1}{2} & x \leqslant 0 \\ \frac{x^2-9}{x^2-x-6} + ax + b & 0 < x < 3 \\ (x-3)^2 & x \geqslant 3 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} 3 + e^{\frac{1}{x}} & x < 0 \\ b - 5 & x = 0 \\ \frac{\sin ax}{x} & x > 0 \end{cases}$

Wskazówki i odpowiedzi

Odp 9.1.

a) $-\frac{1}{2}$	*b)* $\frac{\sqrt{2}-2}{\pi}$	*c)* $\frac{7}{20}$	*d)* -6	*e)* 4	*f)* $-\frac{1}{56}$	*g)* $-\frac{1}{6}$	*h)* $-\frac{5}{2}$
i) $\frac{2}{3}$	*j)* $\frac{10}{3}$	*k)* $\frac{3}{5}$	*l)* $\frac{1}{2}$	*ł)* $-\sqrt{2}$	*m)* $-\frac{\sqrt{2}}{2}$	*n)* $-\infty$	*o)* $-\infty$
p) $\frac{1}{3}$	*r)* 0	*s)* e^5	*t)* $e^{-\frac{4}{3}}$	*u)* $\frac{1}{4}$	*w)* 1	*y)* 1	*z)* $-\frac{4}{3}\ln 4$

Odp 9.2. *a, b, d, g, h) nie istnieje natomiast* *c)* 5 *e)* -4 *f)* $\frac{\sqrt{2}}{2}$

Odp 9.3. *a, b) nie istnieje*

Odp 9.4.

a) ciągła dla $x \in (-\infty; -1) \cup (-1; 2) \cup (2; +\infty)$*; nieciągła dla* $x = -1$*; nieciągła dla* $x = 2$ *ale ciągła prawostronnie*

b) ciągła dla $x \in (-\infty; -1) \cup (-1; +\infty)$*; nieciągła dla* $x = -1$ *ale ciągła prawostronnie*

c) ciągła dla $x \in (-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$*; nieciągła dla* $x = 2$ *ale ciągła lewostronnie*

Odp 9.5. *a)* $a = 1, b = -1$ *b)* $a = -\frac{1}{15}, b = -1$ *c)* $a = 3, b = 8$

10 Rachunek różniczkowy funkcji jednej zmiennej

Zadanie 10.1. *Wyznacz z definicji pochodną funkcji:*

a) $f(x) = 3x^2 - 4x$ *w* $x_0 = -1$

b) $f(x) = x^2 + x + 1$ *w* $x_0 = 1$

c) $f(x) = 2\sqrt{x} - 1$ *w* $x_0 = 4$

d) $f(x) = \sqrt{4x+1}$ *w* $x_0 = 2$

e) $f(x) = \sin 3x$ *w* $x_0 = \frac{\pi}{3}$

f) $f(x) = \cos 5x$ *w* $x_0 = \pi$

Zadanie 10.2. *Oblicz pochodne jednostronne funkcji w danym punkcie* x_0*. Czy istnieje* $f'(x_0)$*? W przypadku negatywnym określ, czy* x_0 *jest punktem kątowym, punktem przegięcia, czy ostrzem.*

a) $f(x) = |x| - 1$ *w* $x_0 = 0$

b) $f(x) = 1 - \frac{1}{x}$ *w* $x_0 = 1$

c) $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ *w* $x_0 = 0$

d) $f(x) = \sqrt[3]{x}$ *w* $x_0 = 0$

e) $f(x) = \sqrt[5]{x+6}$ *w* $x_0 = -6$

f) $f(x) = (x-2)^{\frac{2}{3}}$ *w* $x_0 = 2$

g) $f(x) = x\,|x-3|$ *w* $x_0 = 3$

h) $f(x) = \begin{cases} 2x^2 + 4 & x \leqslant 0 \\ -3x + 4 & x > 0 \end{cases}$ *w* $x_0 = 0$

Zadanie 10.3. *Oblicz pochodną funkcji:*

a) $f(x) = 5x^3 - 6x^2 + 3x + 1$

b) $f(x) = x^7 - 4x^5 + 13x^4 - x + 19$

c) $f(x) = 4x^3\sqrt{x} - 11$

d) $f(x) = \sqrt{x} + \frac{5}{\sqrt[3]{x}} - \frac{1}{x^2} + \frac{3}{x^3}$

e) $f(x) = \frac{7}{2x^2} + \frac{5x^4-1}{x^3}$

f) $f(x) = \frac{3x^2 - 4x\sqrt[3]{x^2}}{2\sqrt{x}}$

g) $f(x) = \frac{x^2-3x}{2x^4+1}$

h) $f(x) = \frac{4x^6+3x^5-2x^4+7x-2}{3x^4+1}$

i) $f(x) = 7\ln x - 3\operatorname{tg} x$

j) $f(x) = x^2 \sin x + 5x^3 - 1$

k) $f(x) = 4x^2 - 3\cos x + 7e^x + 5$

l) $f(x) = \frac{3\operatorname{ctg} x + 5}{2\sin x}$

ł) $f(x) = 2^x \log_3 x + \frac{5}{\sqrt{x}}$

m) $f(x) = e^x\left(x^3 - x + 1\right)$

n) $f(x) = 4\log_2 x + \frac{3e^x}{x^3}$

o) $f(x) = \left(2 + 3x - 4x^2\right)^5$

p) $f(x) = \sqrt{3x^2 - 7x + 12}$

r) $f(x) = \sqrt[3]{2 + x^4 + 5x^5}$

s) $f(x) = \cos^2 3x + 5\sin x^2$

t) $f(x) = \cos(2x-1) + \operatorname{tg}\sqrt{x}$

u) $f(x) = 5\sin^2 x + \sin(x+1)^2$

w) $f(x) = \ln\left(x^2+3\right) + 2^{5x-1}$

x) $f(x) = 3^{x^2+1} - e^{-x^2}$

y) $f(x) = e^{\cos 2x} + \sqrt[x]{3}$

z) $f(x) = \ln \frac{x^2}{1-x^2}$

α) $f(x) = \ln(\sin(4x+3))$

β) $f(x) = -\frac{\cos 2x}{\sin^2 x} + \ln \operatorname{tg} \frac{x}{2}$

γ) $f(x) = e^{\cos^3(7x+4)}$

Zadanie 10.4. *Zależność drogi s od czasu t w pewnym ruchu prostoliniowym dana jest wzorem $s = \sqrt[3]{3t^2} - \sqrt{3t}$. Wyznacz wartości prędkości i przyspieszenia w momencie $t = 3$.*

Zadanie 10.5. *Prąd przepływa przez pewne urządzenie. Ilość przepływającej elektryczności, liczonej od chwili $t = 0$, określa wzór $Q = 3e^{-2t}\left(1 + \frac{1}{t+1}\right)$. Oblicz natężenie prądu $\frac{dQ}{dt}$ w chwili początkowej $t = 0$.*

Zadanie 10.6. *Gaz znajdujący się w objętości V pod ciśnieniem p rozpręża się adiabatycznie według prawa $pV^{1,4} = const$ (zwanego **równaniem przemian adiabatycznych**). Oblicz prędkość zmiany ciśnienia gazu wiedząc, że przy ciśnieniu $p = 10\,atm$ i $V = 3\,m^3$ prędkość zmian objętości wynosi $0,3\,m^3/s$.*

Zadanie 10.7. *Dla danej funkcji:*

A. *Zbadaj monotoniczność i znajdź ekstrema*

B. *Zbadaj wypukłość i znajdź punkty przegięcia*

a) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$

b) $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x - 2$

c) $f(x) = x^4 e^{-x}$

d) $f(x) = \frac{4x}{x^2+4}$

e) $f(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{8}{x^2}$

Zadanie 10.8. *Szybkość reakcji chemicznej w czasie od $t = 0$ do $t = 10$ sekund jest dana zależnością $s = 2t^3 - 3t^2 + 1$. Kiedy szybkość reakcji maleje, a kiedy rośnie? Kiedy jest najmniejsza, a kiedy największa?*

Zadanie 10.9. *Załóżmy, że dana jest mieszanina N_p cząstek prawoskrętnego kwasu winowego i N_l cząstek lewoskrętnego kwasu winowego (kwasy te mają te same właściwości chemiczne, natomiast różnica polega na asymetrycznej zdolności do skręcania płaszczyzny polaryzacji światła). Entropia takiej mieszaniny wyraża się wzorem $S = k\left(N_p \ln \frac{N}{N_p} + N_l \ln \frac{N}{N_l}\right)$, gdzie k oznacza stałą Boltzmanna, natomiast $N = N_p + N_l$. Przy założeniu, że liczba N jest ustalona, oblicz, w jakiej proporcji należy utworzyć mieszaninę tych kwasów, aby miała ona maksymalną entropię.*

Zadanie 10.10. *Lekarstwo jest wstrzykiwane do krwi człowieka, co powoduje wzrost temperatury T jego ciała po jednej godzinie. Jeżeli wstrzyknięto x mg lekarstwa, to $T = \frac{x^2}{8}\left(1 - \frac{x}{16}\right)$, gdzie $0 \leqslant x \leqslant 16$.*

a) *Szybkość zmian temperatury T względem dawkowania x jest nazywana **wrażliwością ciała na dawkowanie**. Wyznacz tę wrażliwość.*

b) *Znajdź wielkość dawkowania, przy której wrażliwość jest największa.*

Zadanie 10.11. *Oblicz granicę funkcji korzystając z reguły de L'Hospitala:*

a) $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x^3}$ *b)* $\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(\cos x)}{\ln(\cos 3x)}$

c) $\lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt[3]{\operatorname{tg} x}-1}{2\sin^2 x-1}$ *d)* $\lim_{x\to 1^+} \frac{\ln(x-1)}{\operatorname{ctg}(x-1)}$

e) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$ *f)* $\lim_{x\to 2} \frac{(x-2)^2}{3\cos\frac{\pi}{4}x}$

g) $\lim_{x\to \infty} \frac{x^5}{e^{7x}}$ *h)* $\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x}\ln x$

i) $\lim_{x\to 0^+} 3xe^{\frac{1}{x}}$ *j)* $\lim_{x\to \infty} \frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{2x-1}$

k) $\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)$ *l)* $\lim_{x\to 1^+} \left(\frac{1}{x-1}-\frac{x}{\ln x}\right)$

ł) $\lim_{x\to 0^+} \left(\operatorname{ctg} x-\frac{1}{x}\right)$ *m)* $\lim_{x\to \infty} \left(\ln(x+e)-\ln x\right)$

n) $\lim_{x\to 1^+} \left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)$ *o)* $\lim_{x\to \infty} \left[\ln(e^x+x)-\frac{1}{2}x\right]$

p) $\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}\right)$ *r)* $\lim_{x\to 0^+} (\cos x)^{\frac{1}{x}}$

s) $\lim_{x\to \frac{\pi}{4}} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x}$ *t)* $\lim_{x\to 0^+} \left(\ln\frac{1}{x}\right)^x$

u) $\lim_{x\to \infty} \left(\frac{2}{\pi}\operatorname{arc\,tg} x\right)^x$ *w)* $\lim_{x\to \frac{1}{2}^+} \left(x-\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{\ln(2x-1)}}$

y) $\lim_{x\to 1^-} (1-x)^{\ln x}$ *z)* $\lim_{x\to 0^+} x^{\sin x}$

Zadanie 10.12. *Zbadaj przebieg zmienności funkcji:*

a) $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$ *b)* $f(x)=\frac{x^2-3}{x-2}$

c) $f(x)=x-\frac{4}{x^2}$ *d)* $f(x)=\frac{x^3}{x^2-1}$

e) $f(x)=\frac{x}{\ln x}$ *f)* $f(x)=xe^{-x^2}$

g) $f(x)=x-\sqrt[3]{x}$ *h)* $f(x)=x\sqrt{x+1}$

Zadanie 10.13. *Oblicz wartość przybliżoną z wykorzystaniem różniczki odpowiedniej funkcji:*

a) $\sqrt{9,01}$ *b)* $\sqrt[4]{17}$

c) $\ln(0,9)$ *d)* $\ln(1,12)$

e) $\sin 29^o$ *f)* $\operatorname{tg} 47^o$

Wskazówki i odpowiedzi

Odp 10.1.

a) $f^{'}(-1) = -10$ *b)* $f^{'}(3) = 3$ *c)* $f^{'}(4) = \frac{1}{2}$

d) $f^{'}(2) = \frac{2}{3}$ *e)* $f^{'}\left(\frac{\pi}{3}\right) = -3$ *f)* $f^{'}(\pi) = 0$

Odp 10.2.

a) $f_{-}^{'}(0) = -1,\ f_{+}^{'}(0) = 1,\ f^{'}(0)$ *nie istnieje,* $x_0 = 0$ *punkt kątowy*

b) $f_{-}^{'}(1) = 1,\ f_{+}^{'}(1) = 1,\ f^{'}(1) = 1$

c) $f_{-}^{'}(0) = -\infty,\ f_{+}^{'}(0) = +\infty,\ f^{'}(0)$ *nie istnieje,* $x_0 = 0$ *ostrze*

d) $f_{-}^{'}(0) = +\infty,\ f_{+}^{'}(0) = +\infty,\ f^{'}(0)$ *nie istnieje,* $x_0 = 0$ *punkt przegięcia*

e) $f_{-}^{'}(-6) = +\infty,\ f_{+}^{'}(-6) = +\infty,\ f^{'}(-6)$ *nie istnieje,* $x_0 = -6$ *punkt przegięcia*

f) $f_{-}^{'}(2) = -\infty,\ f_{+}^{'}(2) = +\infty,\ f^{'}(2)$ *nie istnieje,* $x_0 = 0$ *ostrze*

g) $f_{-}^{'}(3) = -3,\ f_{+}^{'}(3) = +3,\ f^{'}(3)$ *nie istnieje,* $x_0 = 3$ *punkt kątowy*

h) $f_{-}^{'}(0) = 0,\ f_{+}^{'}(0) = -3,\ f^{'}(0)$ *nie istnieje,* $x_0 = 0$ *punkt kątowy*

Odp 10.3.

a) $f^{'}(x) = 15x^2 - 12x + 3$

b) $f^{'}(x) = 7x^6 - 20x^4 + 52x^3 - 1$

c) $f^{'}(x) = 14x^{\frac{5}{2}}$

d) $f^{'}(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} - \frac{5}{3}x^{-\frac{4}{3}} + 2x^{-3} - 9x^{-4}$

e) $f^{'}(x) = -7x^{-3} + 5 + 3x^{-4}$

f) $f^{'}(x) = \frac{9}{4}x^{\frac{1}{2}} - \frac{7}{3}x^{\frac{1}{6}}$

g) $f^{'}(x) = \frac{-12x^5+18x^4+2x-3}{(2x^4+1)^2}$

h) $f^{'}(x) = \frac{\left(24x^5+15x^4-8x^3+7\right)\left(3x^4+1\right)-\left(4x^6+3x^5-2x^4+7x-2\right)\cdot 12x^3}{(3x^4+1)^2}$

i) $f^{'}(x) = \frac{7}{x} - \frac{3}{\cos^2 x}$

j) $f^{'}(x) = 2x\sin x + x^2\cos x + 15x^2$

k) $f^{'}(x) = 8x + 3\sin x + 7e^x$

l) $f^{'}(x) = \frac{-\frac{3}{\sin^2 x}\cdot 2\sin x + (3\operatorname{ctg} x + 5)\cdot 2\cos x}{4\sin^2 x}$

ł) $f^{'}(x) = 2^x\ln 2\cdot\log_3 x + 2^x\cdot\frac{1}{x\ln 3} - \frac{5}{2}x^{-\frac{3}{2}}$

m) $f^{'}(x) = e^x\left(x^3 + 3x^2 - x\right)$

n) $f^{'}(x)=\frac{4}{x\ln 2}+3e^{x}\left(x^{-3}-3x^{-4}\right)$

o) $f^{'}(x)=5\left(2+3x-4x^{2}\right)^{4}(3-8x)$

p) $f^{'}(x)=\frac{1}{2}\left(3x^{2}-7x+12\right)^{-\frac{1}{2}}(6x-7)$

r) $f^{'}(x)=\frac{1}{3}\left(2+x^{4}+5x^{5}\right)^{-\frac{2}{3}}\left(4x^{3}+25x^{4}\right)$

s) $f^{'}(x)=2\cos 3x(-\sin 3x)\cdot 3+5\cos x^{2}\cdot 2x$

t) $f^{'}(x)=-\sin(2x-1)\cdot 2+\frac{1}{\cos^{2}\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$

u) $f^{'}(x)=10\sin x\cos x+\cos(x+1)^{2}\cdot 2(x+1)$

w) $f^{'}(x)=\frac{1}{x^{2}+3}\cdot 2x+2^{5x-1}\ln 2\cdot 5$

x) $f^{'}(x)=3^{x^{2}+1}\ln 3\cdot 2x-e^{-x^{2}}(-2x)$

y) $f^{'}(x)=e^{\cos 2x}(-\sin 2x)\cdot 2+3^{\frac{1}{x}}\ln 3\left(-x^{-2}\right)$

z) $f^{'}(x)=\frac{1-x^{2}}{x^{2}}\cdot\frac{2x\left(1-x^{2}\right)-x^{2}(-2x)}{(1-x^{2})^{2}}$

α) $f^{'}(x)=\frac{1}{\sin(4x+3)}\cos(4x+3)\cdot 4$

β) $f^{'}(x)=-\frac{-\sin @x\cdot 2\sin^{2}x-\cos 2x\cdot 2\sin x\cos x}{\sin^{4}x}+\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}\cdot\frac{1}{\cos^{2}\frac{x}{2}}\cdot\frac{1}{2}$

γ) $f^{'}(x)=e^{\cos^{3}(7x+4)}3\cos^{2}(7x+4)(-\sin(7x+4))\cdot 7$

Odp 10.4. $v(3)=\frac{1}{6}\qquad a(3)=\frac{1}{108}$

Odp 10.5. $\frac{dQ}{dt}(0)=-15$

Odp 10.6. *Ciśnienie gazu zmniejsza się z prędkością* $1,4\,atm/s$ *ponieważ* $p^{'}=-1,4\,atm/s$.

Odp 10.7.

a) *f.malejąca dla* $x\in(0;2)$, *f.rosnąca dla* $x\in(-\infty;0)\cup(2;+\infty)$, $P_{min}(2,-3)$, $P_{max}(0,1)$
f.wklęsła dla $x\in(-\infty;1)$, *f.wypukła dla* $x\in(1;+\infty)$, $P_{pp}(1,-3)$

b) *f.malejąca dla* $x\in(-3;1)$, *f.rosnąca dla* $x\in(-\infty;-3)\cup(1;+\infty)$, $P_{min}(1,-7)$, $P_{max}(-3,25)$
f.wklęsła dla $x\in(-\infty;-1)$, *f.wypukła dla* $x\in(-1;+\infty)$, $P_{pp}(-1,9)$

c) *f.malejąca dla* $x\in(-\infty;0)\cup(4;+\infty)$, *f.rosnąca dla* $x\in(0;4)$, $P_{min}(0,0)$, $P_{max}\left(4,256e^{-4}\right)$
f.wklęsła dla $x\in(2;6)$, *f.wypukła dla* $x\in(-\infty;0)\cup(0;2)\cup(6;+\infty)$, $P_{pp1}\left(2,16e^{-2}\right)$, $P_{pp2}\left(6,1296e^{-6}\right)$

d) *f.malejąca dla* $x\in(-\infty;2)\cup(2;+\infty)$, *f.rosnąca dla* $x\in(-2;2)$, $P_{min}(-2,-1)$, $P_{max}(2,1)$
f.wklęsła dla $x\in\left(-\infty;-2\sqrt{3}\right)\cup\left(0;2\sqrt{3}\right)$, *f.wypukła dla* $x\in\left(-2\sqrt{3};0\right)\cup\left(2\sqrt{3};+\infty\right)$, $P_{pp1}\left(-2\sqrt{3},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $P_{pp2}\left(2\sqrt{3},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

e) *f.malejąca dla* $x\in(-2;0)\cup(0;2)$, *f.rosnąca dla* $x\in(-\infty;-2)\cup(2;+\infty)$, $P_{min}(2,4)$, $P_{min}(-2,4)$
f.wklęsła dla $x\in\varnothing$, *f.wypukła dla* $x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$, *brak punktów przegięcia*

Odp 10.8. *Szybkość reakcji maleje dla* $t \in (0;1)$*, a rośnie dla* $t \in (1;10)$*. Najmniejsza szybkość wynosi* 0 *dla* $t=1$*, największa* 1701 *dla* $t=10$*.*

Odp 10.9. *Aby entropia była największa należy użyć* $\frac{1}{2}N$ *cząstek kwasu lewoskrętnego i* $\frac{1}{2}N$ *cząstek prawoskrętnego.*

Odp 10.10. *a)* $T^{'} = \frac{x}{4} - \frac{3x^2}{128}$ *b)* $x = \frac{32}{3}$

Odp 10.11.

a) $+\infty$	*b)* $\frac{1}{9}$	*c)* $\frac{1}{3}$	*d)* 0	*e)* 1	*f)* 0	*g)* 0	*h)* 0
i) $+\infty$	*j)* $\frac{1}{2}$	*k)* $\frac{1}{2}$	*l)* $-\infty$	*ł)* 0	*m)* 0	*n)* 1	*o)* 1
p) 0	*r)* 1	*s)* e^{-1}	*t)* 1	*u)* 0	*w)* e^3	*y)* e^{-1}	*z)* 1

Odp 10.12.

a) Dziedzina funkcji: $D(f) = \mathbb{R}$
Granice funkcji na końcach przedziałów określoności:
$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$, $y = 0$ *asymptota pozioma obustronna*
Asymptota ukośna: $y = 0$
Punkty przecięcia z osiami: OX *- brak;* OY *-* $P(0,1)$
Funkcja parzysta
Pochodna funkcji i jej dziedzina: $f^{'}(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}$ $D\left(f^{'}\right) = \mathbb{R}$
Tabelka:

x	$\left(-\infty; -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}; 0\right)$	0	$\left(0; \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}; +\infty\right)$
$f^{'}$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$f^{''}$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
f	$\smile\nearrow$	$\frac{3}{4}$	$\frown\nearrow$	1	$\frown\searrow$	$\frac{3}{4}$	$\smile\searrow$

b) Dziedzina funkcji: $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{2\}$
Granice funkcji na końcach przedziałów określoności:
$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$
$\lim_{x\to2^-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to2^+} f(x) = +\infty$, $x = 2$ *asymptota pionowa obustronna*
Asymptota ukośna: $y = x + 2$
Punkty przecięcia z osiami: OX *-* $P_1\left(-\sqrt{3}, 0\right)$, $P_2\left(\sqrt{3}, 0\right)$*;* OY *-* $P\left(0, \frac{3}{2}\right)$
Funkcja ani parzysta ani nieparzysta
Pochodna funkcji i jej dziedzina: $f^{'}(x) = \frac{x^2-4x+3}{(x-2)^2}$ $D\left(f^{'}\right) = \mathbb{R} \setminus \{2\}$
Tabelka:

x	$(-\infty; 1)$	1	$(1; 2)$	2	$(2; 3)$	3	$(3; +\infty)$
$f^{'}$	$+$	0	$-$	$\times$	$-$	0	$+$
$f^{''}$	$-$	$-$	$-$	$\times$	$+$	$+$	$+$
f	$\frown\nearrow$	2	$\frown\searrow$	$\times$	$\smile\searrow$	6	$\smile\nearrow$

c) Dziedzina funkcji: $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
Granice funkcji na końcach przedziałów określoności:

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$
$\lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$, $x = 0$ *asymptota pionowa obustronna*
Asymptota ukośna: $y = x$
Punkty przecięcia z osiami: OX - $P\left(\sqrt[3]{4}, 0\right)$; OY - *brak*
Funkcja ani parzysta ani nieparzysta
Pochodna funkcji i jej dziedzina: $f^{'}(x) = 1 + \frac{8}{x^3}$ $\quad D\left(f^{'}\right) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
Tabelka:

x	$(-\infty;-2)$	-2	$(-2;0)$	0	$(0;+\infty)$
$f^{'}$	$+$	0	$-$	$\times$	$+$
$f^{''}$	$-$	$-$	$-$	$\times$	$-$
f	$\frown\nearrow$	-3	$\frown\searrow$	$\times$	$\frown\nearrow$

d) *Dziedzina funkcji:* $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1;1\}$
Granice funkcji na końcach przedziałów określoności:
$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$
$\lim_{x\to -1^-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to -1^+} f(x) = +\infty$, $x = -1$ *asymptota pionowa obustronna*
$\lim_{x\to 1^-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$, $x = 1$ *asymptota pionowa obustronna*
Asymptota ukośna: $y = x$
Punkty przecięcia z osiami: OX - $P(0,0)$; OY - $P(0,0)$
Funkcja nieparzysta
Pochodna funkcji i jej dziedzina: $f^{'}(x) = \frac{x^2\left(x^2-3\right)}{\left(x^2-1\right)^2}$ $\quad D\left(f^{'}\right) = \mathbb{R} \setminus \{-1;1\}$
Tabelka:

x	$\left(-\infty;-\sqrt{3}\right)$	$-\sqrt{3}$	$\left(-\sqrt{3};-1\right)$	-1	$(-1;0)$
$f^{'}$	$+$	0	$-$	$\times$	$-$
$f^{''}$	$-$	$-$	$-$	$\times$	$+$
f	$\frown\nearrow$	$-\frac{3\sqrt{3}}{2}$	$\frown\searrow$	$\times$	$\smile\searrow$

cd.

x	0	$(0;1)$	1	$\left(1;\sqrt{3}\right)$	$\sqrt{3}$	$\left(\sqrt{3};+\infty\right)$
$f^{'}$	0	$-$	$\times$	$-$	0	$+$
$f^{''}$	0	$-$	$\times$	$+$	$+$	$+$
f	0	$\frown\searrow$	$\times$	$\smile\searrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	$\smile\nearrow$

e) *Dziedzina funkcji:* $D(f) = (0;1) \cup (1;+\infty)$
Granice funkcji na końcach przedziałów określoności:
$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$
$\lim_{x\to 1^-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$, $x = 1$ *asymptota pionowa obustronna*
Asymptota ukośna: brak
Punkty przecięcia z osiami: OX - *brak*; OY - *brak*
Funkcja ani parzysta ani nieparzysta
Pochodna funkcji i jej dziedzina: $f^{'}(x) = \frac{\ln x - 1}{\ln^2 x}$ $\quad D\left(f^{'}\right) = (0;1) \cup (1;+\infty)$
Tabelka:

x	$(0;1)$	1	$(1;e)$	e	$(e;e^2)$	e^2	$(e^2;+\infty)$
f'	$-$	$\times$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
f''	$-$	$\times$	$+$	$+$	$+$	0	$-$
f	$\frown\searrow$	$\times$	$\smile\searrow$	e	$\smile\nearrow$	$\frac{1}{2}e^2$	$\frown\nearrow$

f) Dziedzina funkcji: $D(f) = \mathbb{R}$
Granice funkcji na końcach przedziałów określoności:
$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$, $y = 0$ *asymptota pozioma obustronna*
Asymptota ukośna: $y = 0$
Punkty przecięcia z osiami: OX - $P(0,0)$; OY - $P(0,0)$
Funkcja nieparzysta
Pochodna funkcji i jej dziedzina: $f'(x) = e^{-x^2}\left(1-2x^2\right) \quad D\left(f'\right) = \mathbb{R}$
Tabelka:

x	$\left(-\infty;-\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$	$-\frac{\sqrt{6}}{2}$	$\left(-\frac{\sqrt{6}}{2};-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2};0\right)$
f'	$-$	$-$	$-$	0	$+$
f''	$-$	0	$+$	$+$	$+$
f	$\frown\searrow$	$-\frac{\sqrt{6}}{2}e^{-\frac{3}{2}}$	$\smile\searrow$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{1}{2}}$	$\smile\nearrow$

cd.

x	0	$\left(0;\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\left(\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$	$\frac{\sqrt{6}}{2}$	$\left(\frac{\sqrt{6}}{2};+\infty\right)$
f'	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
f''	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
f	0	$\frown\nearrow$	$\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{1}{2}}$	$\frown\searrow$	$\frac{\sqrt{6}}{2}e^{-\frac{3}{2}}$	$\smile\searrow$

g) Dziedzina funkcji: $D(f) = \mathbb{R}$
Granice funkcji na końcach przedziałów określoności:
$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$
Asymptota ukośna: brak
Punkty przecięcia z osiami: OX - $P_1(-1,0)$, $P_2(0,0)$, $P_3(1,0)$; OY - $P(0,0)$
Funkcja nieparzysta
Pochodna funkcji i jej dziedzina: $f'(x) = 1 - \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \quad D\left(f'\right) = \mathbb{R}\setminus\{0\}$
Tabelka:

x	$\left(-\infty;-\frac{\sqrt{3}}{9}\right)$	$-\frac{\sqrt{3}}{9}$	$\left(-\frac{\sqrt{3}}{9};0\right)$	0	$\left(0;\frac{\sqrt{3}}{9}\right)$	$\frac{\sqrt{3}}{9}$	$\left(\frac{\sqrt{3}}{9};+\infty\right)$
f'	$+$	0	$-$	$\times$	$-$	0	$+$
f''	$-$	$-$	$-$	$\times$	$+$	$+$	$+$
f	$\frown\nearrow$	$\frac{2\sqrt{3}}{9}$	$\frown\searrow$	0	$\smile\searrow$	$-\frac{2\sqrt{3}}{9}$	$\smile\nearrow$

h) Dziedzina funkcji: $D(f) = \langle -1;+\infty)$
Granice funkcji na końcach przedziałów określoności:
$\lim_{x\to-1^+} f(x) = 0$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$
Asymptota ukośna: brak
Punkty przecięcia z osiami: OX - $P_1(-1,0)$, $P_2(0,0)$; OY - $P(0,0)$
Funkcja ani parzysta ani nieparzysta

Pochodna funkcji i jej dziedzina: $f^{'}(x) = \frac{3x+2}{2\sqrt{x+1}}$ $\quad D\left(f^{'}\right) = (-1; +\infty)$
Tabelka:

x	-1	$\left(-1; -\frac{2}{3}\right)$	$-\frac{2}{3}$	$\left(-\frac{2}{3}; +\infty\right)$
$f^{'}$	$\times$	$-$	0	$+$
$f^{''}$	$\times$	$+$	$+$	$+$
f	0	$\smile\searrow$	$-\frac{2\sqrt{3}}{9}$	$\smile\nearrow$

Odp 10.13.

a) $3\frac{1}{600}$ *b)* $2\frac{1}{32}$ *c)* $-0,1$ *d)* $0,12$ *e)* $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}\pi}{360}$ *f)* $1\frac{\pi}{45}$

11 Funkcje wielu zmiennych

Zadanie 11.1. *Jaką powierzchnię opisuje funkcja $z(x,y)$?*

a) $z = 3 - 2x + y$

b) $z = \pm\sqrt{1 - \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{9}}$

c) $z = \pm 4\sqrt{1 - x^2 - y^2}$

d) $z = \pm 3\sqrt{\frac{x^2}{2} + y^2 + 1}$

e) $z = \pm\sqrt{x^2 + \frac{y^2}{3} - 1}$

f) $z = \pm 2\sqrt{\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}}$

g) $z = \frac{x^2}{2} + y^2$

h) $z = x^2 - \frac{y^2}{4}$

Zadanie 11.2. *Znajdź i wykreśl dziedzinę funkcji:*

a) $f(x,y) = \frac{3}{(x-1)^2 + y^2}$

b) $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 9}$

c) $f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{5 - x^2 - 2x - y^2 - y}}$

d) $f(x,y) = \ln xy$

e) $f(x,y) = \sqrt{\frac{x^2 + x + y^2}{x^2 - 2x + y^2 - y + 1}}$

f) $f(x,y,z) = \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}$

g) $f(x,y,z) = \sqrt{4 - x^2} + \sqrt{1 - y^2} + \sqrt{9 - z^2}$

h) $f(x,y,z) = \ln(z - 1 + 2x + 3y)$

Zadanie 11.3. *Oblicz granicę funkcji:*

a) $\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$

b) $\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{1-xy}{x^2+y^2}$

c) $\lim_{(x,y)\to(2,2)} \frac{x^2-y^2}{x^2+2x-xy-2y}$

d) $\lim_{(x,y)\to(0,5)} \frac{\sin xy}{x}$

e) $\lim_{(x,y)\to(\infty,-3)} \left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{x^2}{x+y}}$

f) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sqrt{x^2y^2+1}-1}{x^2+y^2}$

g) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2}$

h) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$

i) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^4}$

j) $\lim_{(x,y)\to(\infty,\infty)} \frac{x}{x+y}$

Zadanie 11.4. *Wyznacz granicę funkcji oraz odpowiednie granice iterowane:*

a) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} x\sin\frac{1}{y}$

b) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^3+3y^2}{x^2+y^2}$

c) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x-y+x^2+y^2}{x+y}$

d) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{y+1}-1}$

Zadanie 11.5. *Zbadaj ciągłość funkcji:*

a) $f(x,y) = \begin{cases} 5-x-y & (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(1,2)\} \\ 1 & (x,y) = (1,2) \end{cases}$

b) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^4} & x^2+y^4 > 0 \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

c) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{4xy}{x^2+y^2} & x^2+y^2 > 0 \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Zadanie 11.6. *Oblicz pochodne cząstkowe funkcji:*

a) *rzędu I, jeśli* $z = x^3 + 5xy^2 - y^3$

b) *rzędu I, jeśli* $u = \frac{x}{y} + \frac{y}{z} - \frac{z}{x}$

c) *rzędu I, jeśli* $z = \sqrt[x]{e^y}$

d) *rzędu I, jeśli* $z = \ln\left(x + \sqrt{x^2+y^2}\right)$

e) *rzędu I i II, jeśli* $z = x^3 - 2x^2y + 3y^2$

f) *rzędu I i II, jeśli* $u = e^{xyz}$

g) *rzędu I i II, jeśli* $z = \frac{x^2}{2y-3}$

h) *rzędu I i II, jeśli* $z = e^x \ln y + \sin y \ln x$

Zadanie 11.7. *Wyznacz różniczkę zupełną funkcji:*

a) $z = 3x^2y^5$

b) $u = 2x^{yz}$

c) $z = y \ln 2x$

d) $z = \sin^2 x \cos^2 y$

e) $u = \frac{xy}{z}$

f) $z = \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x} + \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{y}$

Zadanie 11.8. *Oblicz przybliżoną wartość z wykorzystaniem różniczki zupełnej:*

a) $1,08^{3,96}$

b) $1,94^2 e^{0,12}$

c) $\sin 1,59 \cdot \operatorname{tg} 3,09$

d) $\frac{\sin 1,49 \cdot \operatorname{arc\,tg} 0,07}{2^{2,95}}$

Zadanie 11.9. *Wyznacz różniczkę zupełną II rzędu funkcji:*

a) $z = e^{x+y}$

b) $z = xy$

c) $z = x^2 - y^2$

d) $z = \frac{x}{y}$

Zadanie 11.10. *Oblicz pochodne cząstkowe funkcji złożonej:*

a) $y = u^2 e^v$, *jeżeli* $u = \sin x$ *oraz* $v = \cos x$

b) $z = e^{3x+2y}$, *jeżeli* $x = \cos t$ *oraz* $y = t^2$

c) $u = x^y$, *jeżeli* $x = \ln(t-z)$ *oraz* $y = e^{\frac{t}{z}}$

d) $z = x^2 \ln y$, *jeżeli* $x = \frac{w}{t}$ *oraz* $y = 3w - 2t$

e) $z = e^{2xy}$, *jeżeli* $y = \sqrt{x}$

f) $u = x \sin y \cos z$, *jeżeli* $y = \ln\left(x^2-1\right)$ *oraz* $z = -\sqrt{1-x^2}$

Zadanie 11.11. *Znajdź ekstrema funkcji:*

a) $f(x,y) = x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2$

b) $f(x,y) = e^{x-y}\left(x^2 - 2y^2\right)$

c) $f(x,y) = 3\ln\frac{x}{6} + 2\ln y + \ln(12 - x - y)$

d) $f(x,y,z) = x^3 + y^2 + z^2 + 12xy + 2z$

e) $f(x,y,z) = 3\ln x + 2\ln y + 5\ln z + \ln(22 - x - y - z)$

f) $f(x,y,z) = 4x - \frac{2x^2}{y} - \frac{y^2}{z} - 2z^2, \quad x,y,z > 0$

Zadanie 11.12. *Znajdź ekstrema warunkowe funkcji:*

a) $f(x,y) = xy$, *jeżeli* $x^2 + y^2 = 8$

b) $f(x,y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$, *jeżeli* $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{2}$

c) $f(x,y,z) = x - 2y + 2z$, *jeżeli* $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

d) $f(x,y,z) = xyz$, *jeżeli* $x + y + z = 1, \ -x - y + 2z = 5$

Zadanie 11.13. *Wykreśl określone poziomice pola skalarnego oraz znajdź i wykreśl gradient w punktach A i B:*

a) $u = x^2 + 2y$ *dla* $u = -2, -1, 0, 1, 2$ $A(1,-1)$ *oraz* $B(-2,-2)$

b) $u = x^2 + y^2$ *dla* $u = 1, \frac{9}{4}, 4, \frac{25}{4}, 9$ $A(1,1)$ *oraz* $B\left(0, -\frac{3}{2}\right)$

c) $u = xy$ *dla* $u = -3, -2, -1, 1, 2, 3$ $A(1,1)$ *oraz* $B(-3,-1)$

Zadanie 11.14. *Oblicz pochodną funkcji* $u = \sqrt{x^2 + y^2}$ *w punkcie* $P(3,4)$ *w kierunku:*

a) *wektora* $\vec{v} = [4, -3]$

b) *dwusiecznej kąta* 45^o

c) *promienia wodzącego punktu* P

Zadanie 11.15. *Oblicz pochodną funkcji* u *w punkcie* P *w kierunku wektora* $\vec{v}$*:*

a) $u = xy + yz + 1$ *dla* $P(0,-2,-1)$ *oraz* $\vec{v} = [12, -3, -4]$

b) $u = xyz$ *dla* $P(1,-2,2)$ *oraz* $\vec{v}$ *- promień wodzący punktu* P

c) $u = f \circ g, \quad f(x,y) = xy \quad g(x,y) = (x + 2y, -3x + 6)$ *dla* $P(1,1)$ *oraz* $\vec{v} = [1, -2]$

Zadanie 11.16. *Oblicz dywergencję pola wektorowego:*

a) $\vec{A} = [y - z, z - x, x - y]$

b) $\vec{A} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

c) $\vec{A} = \frac{\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}}{\sqrt[3]{(x+y+z)^2}}$

d) $\vec{A} = e^{xy}\left(y\vec{j} - x\vec{i} + xy\vec{k}\right)$

e) $\vec{A} = \left[xy^2, x^2y, z^3\right]$ *w punkcie* $P(1,-1,3)$

f) *gradientu funkcji* $u = xy^2z^3$

Zadanie 11.17. *Oblicz rotację pola wektorowego:*

a) $\vec{A} = \left[xy^2, x^2y, z^3\right]$

b) $\vec{A} = x\vec{i} - z^2\vec{j} + y^2\vec{k}$

c) $\vec{A} = yz\vec{i} + xz\vec{j} + xy\vec{k}$

d) $\vec{A} = \left[x^2y^3, 1, z\right]$ *w punkcie* $P\,(1, 2, 3)$

Zadanie 11.18. *Sprawdź, czy pole wektorowe* $\vec{A}$ *jest:*

a) *polem selenoidalnym, jeśli* $\vec{A} = yz\left(4x\vec{i} - y\vec{j} - z\vec{k}\right)$

b) *polem potencjalnym, jeśli* $\vec{A} = \left[x^2 - 2y, 3x^2y - 5z, 5z^2 - 3xy + y^2 - 1\right]$

c) *polem potencjalnym, jeśli* $\vec{A}$ *jest gradientem funkcji* $u = \sqrt{x}\,\sqrt[3]{y}\,\sqrt[4]{z}$

d) *polem harmonicznym, jeśli* $\vec{A} = \frac{x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}$

Zadanie 11.19. *Wykaż, że tzw.* ***pole newtonowskie****, tj. pole wektorowe, w którym siła* $\vec{F}$ *w dowolnym punkcie* P *jest odwrotnie proporcjonalna do kwadratu jego długości od pewnego stałego punktu* O*, w którym umieszczona jest masa* m*, i skierowana jest wzdłuż promienia wodzącego od punktu* P *do* O*, jest polem potencjalnym. Ponadto oblicz natężenie siły w punkcie* P*.*

Wskazówki i odpowiedzi

Odp 11.1.

a) płaszczyzna

b) elipsoida (soczewka)

c) elipsoida (cygaro)

d) hiperboloida dwupowłokowa

e) hiperboloida jednopowłokowa

f) stożek

g) paraboloida eliptyczna

h) paraboloida hiperboliczna

Odp 11.2.

a) $D(f) = \mathbb{R}^2 \setminus \{(1,0)\}$

b) $D(f) = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 \geqslant 9\right\}$

c) $D(f) = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon \ (x+1)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 < \frac{25}{4}\right\}$

d) $D(f) = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon xy > 0\right\}$

e) $D(f) = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon \ \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 \geqslant \frac{1}{4} \ \wedge \ (x-1)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 > \frac{1}{4}\right\}$

f) $D(f) = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x \geqslant 0 \ \wedge \ y \geqslant 0 \ \wedge \ z \geqslant 0\right\}$

g) $D(f) = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x \in \langle -2; 2\rangle \ \wedge \ y \in \langle -1; 1\rangle \ \wedge \ z \in \langle -3; 3\rangle\right\}$

h) $D(f) = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon \frac{x}{\frac{1}{2}} + \frac{y}{\frac{1}{3}} + \frac{z}{1} > 1\right\}$

Odp 11.3.

a) $\ln 2$ *b)* 1 *c)* 1 *d)* 5 *e)* e

f) 0 *g)* 0 *h) nie istnieje* *i) nie istnieje* *j) nie istnieje*

Odp 11.4.

a) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$, $\lim_{x\to 0}\left[\lim_{y\to 0} f(x,y)\right]$ *nie istnieje,* $\lim_{y\to 0}\left[\lim_{x\to 0} f(x,y)\right] = 0$

b) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ *nie istnieje,* $\lim_{x\to 0}\left[\lim_{y\to 0} f(x,y)\right] = 0$, $\lim_{y\to 0}\left[\lim_{x\to 0} f(x,y)\right] = 3$

c) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ *nie istnieje,* $\lim_{x\to 0}\left[\lim_{y\to 0} f(x,y)\right] = 1$, $\lim_{y\to 0}\left[\lim_{x\to 0} f(x,y)\right] = -1$

d) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$, $\lim_{x\to 0}\left[\lim_{y\to 0} f(x,y)\right] = 0$, $\lim_{y\to 0}\left[\lim_{x\to 0} f(x,y)\right] = 0$

Odp 11.5.

a) nieciągła dla $(x,y) = (1,2)$

b) nieciągła dla $(x,y) = (0,0)$

c) nieciągła dla $(x,y) = (0,0)$

Odp 11.6.

a) $\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 + 5y^2,\ \frac{\partial z}{\partial y} = 10xy - 3y^2$

b) $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{y} + zx^{-2},\ \frac{\partial u}{\partial y} = -xy^{-2} + \frac{1}{z},\ \frac{\partial u}{\partial z} = -yz^{-2} - \frac{1}{x}$

c) $\frac{\partial z}{\partial x} = e^{\frac{y}{x}}\left(-yx^{-2}\right),\ \frac{\partial z}{\partial y} = e^{\frac{y}{x}} \cdot \frac{1}{x}$

d) $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+y^2}}\left(1 + \frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x\right),\ \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2y$

e) $\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 - 4xy,\ \frac{\partial z}{\partial y} = -2x^2 + 6y,\ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x - 4y,\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6,\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -4x,\ \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = -4x$

f) $\frac{\partial u}{\partial x} = e^{xyz}yz,\ \frac{\partial u}{\partial y} = e^{xyz}xz,\ \frac{\partial u}{\partial z} = e^{xyz}xy,$

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = e^{xyz}yz \cdot yz,\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = e^{xyz}xz \cdot xz,\ \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = e^{xyz}xy \cdot xy,$

$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = e^{xyz}xz \cdot yz + e^{xyz}z,\ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} = e^{xyz}xy \cdot yz + e^{xyz}y,\ \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = e^{xyz}yz \cdot xz + e^{xyz}z,$

$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = e^{xyz}xy \cdot xz + e^{xyz}x,\ \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x} = e^{xyz}yz \cdot xy + e^{xyz}y,\ \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial y} = e^{xyz}xz \cdot xy + e^{xyz}x$

g) $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x}{2y-3},\ \frac{\partial z}{\partial y} = -x^2\left(2y-3\right)^{-2} \cdot 2,\ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{2}{2y-3},\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 4x^2\left(2y-3\right)^{-3} \cdot 2,$

$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -4x\left(2y-3\right)^{-2},\ \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = -2x\left(2y-3\right)^{-2} \cdot 2$

h) $\frac{\partial z}{\partial x} = e^x \ln y + \sin y \cdot \frac{1}{x},\ \frac{\partial z}{\partial y} = e^x \cdot \frac{1}{y} + \cos y \ln x,\ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = e^x \ln y + \sin y \cdot \left(-x^{-2}\right),$

$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = e^x\left(-y^{-2}\right) - \sin y \ln x,\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = e^x \cdot \frac{1}{y} + \cos y \cdot \frac{1}{x},\ \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = e^x \cdot \frac{1}{y} + \cos y \cdot \frac{1}{x}$

Odp 11.7.

a) $dz = 6xy^5\,dx + 15x^2y^4\,dy$

b) $du = 2yzx^{yz-1}\,dx + 2zx^{yz}\ln x\,dy + 2yx^{yz}\ln x\,dz$

c) $dz = \frac{y}{x}\,dx + \ln 2x\,dy$

d) $dz = \sin x \cos x \cos^2 y\,dx - 2\sin^2 x \sin y \cos y\,dy$

e) $du = \frac{y}{z}\,dx + \frac{x}{z}\,dy - xyz^{-2}\,dz$

f) $dz = 0\,dx + 0\,dy$

Odp 11.8.

a) $1,08^{3,96} \approx 1,32,\ (x_0, y_0) = (1, 4)$

b) $1,94^2 e^{0,12} \approx 4,24,\ (x_0, y_0) = (2, 0)$

c) $\sin 1,59 \cdot \operatorname{tg} 3,09 \approx -0,05,\ (x_0, y_0) = \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$

d) $\frac{\sin 1,49 \cdot \operatorname{arc\,tg} 0,07}{2^{2,95}} \approx \frac{7}{800},\ (x_0, y_0, z_0) = \left(\frac{\pi}{2}, 0, 3\right)$

Odp 11.9.

a) $d^2z = e^{x+y}\left(dx^2 + 2\,dx\,dy + dy^2\right)$

b) $d^2z = 2\,dx\,dy$

c) $d^2z = 2\left(dx^2 - dy^2\right)$

d) $d^2z = -2y^{-2}\,dx\,dy + 2xy^{-3}\,dy^2$

Odp 11.10.

a) $\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial y}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = 2ue^v \cdot \cos x + u^2 e^v \cdot (-\sin x)$

b) $\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t} = 3e^{3x+2y} \cdot (-\sin t) + 2e^{3x+2y} \cdot 2t$

c) $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t} = yx^{y-1} \cdot \frac{1}{t-z} + x^y \ln x \cdot e^{\frac{t}{z}} \frac{1}{z},$
$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial z} = yx^{y-1} \cdot \left(-\frac{1}{t-z}\right) + x^y \ln x \cdot e^{\frac{t}{z}} \left(-tz^{-2}\right)$

d) $\frac{\partial z}{\partial w} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial w} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial w} = 2x \ln y \cdot \frac{1}{t} + \frac{x^2}{y} \cdot 3,$
$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t} = 2x \ln y \cdot \left(-wt^{-2}\right) + \frac{x^2}{y} \cdot (-2)$

e) $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial x} = 2ye^{2xy} + 2xe^{2xy} \cdot \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}}$

f) $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} =$
$= \sin y \cos z + x \cos y \cos z \cdot \frac{2x}{x^2-1} + (-x \sin y \sin z) \cdot \left(-\frac{1}{2}\left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}(-2x)\right)$

Odp 11.11.

a) $f_{min}(-1,-1) = -2,\ f_{min}(1,1) = -2,\ P(0,0)$ - *brak ekstremum*

b) $f_{max}(-4,-2) = 8e^{-6},\ P(0,0)$ - *brak ekstremum*

c) $f_{max}(6,4) = 5\ln 2$

d) $f_{min}(24,-144,-1) = -6913,\ P(0,0,-1)$ - *brak ekstremum*

e) $f_{max}(6,4,10) = 13\ln 2 + 3\ln 3 + 5\ln 5$

f) $f_{max}\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{8}$

Odp 11.12.

a) $\lambda = -\frac{1}{2}$: $P_1(-2,-2),\ P_2(2,2)$ - *brak ekstremum;*
$\lambda = \frac{1}{2}$: $f_{min}(-2,2) = -4,\ f_{min}(2,-2) = -4$

b) $\lambda = -1$: $f_{max}(2,2) = 1$
$\lambda = 1$: $f_{min}(-2,-2) = -1$

c) $\lambda = -\frac{3}{2}$: $f_{max}\left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) = 3$
$\lambda = \frac{3}{2}$: $f_{min}\left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right) = -3$

d) $\lambda = \frac{7}{12},\ \mu = -\frac{5}{12}$: $P\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 2\right)$ - *brak ekstremum*

Odp 11.13.

a) $y = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}u,\ grad\, u = [2x, 2],\ grad\, u_{|A} = [2,2],\ grad\, u_{|B} = [2,2]$

b) $x^2 + y^2 = u,\ grad\, u = [2x, 2y],\ grad\, u_{|A} = [2,2],\ grad\, u_{|B} = [0,-3]$

c) $y = \frac{u}{x},\ grad\, u = [y, x],\ grad\, u_{|A} = [1,1],\ grad\, u_{|B} = [-1,-3]$

Odp 11.14. *a)* 0 *b)* $\frac{7\sqrt{2}}{10}$ *c)* 1

Odp 11.15. *a)* 13 *b)* $-\frac{4}{3}$ *c)* $-\frac{18\sqrt{5}}{5}$

Odp 11.16.

a) $div\,\vec{A}=0$ *b)* $div\,\vec{A}=3$ *c)* $div\,\vec{A}=-2\left(x+y+z\right)^{-\frac{5}{3}}$

d) $div\,\vec{A}=0$ *e)* $div\,\vec{A}_{|P}=29$ *f)* $div\,grad\,u=2xz^3+6xy^2z$

Odp 11.17. *a)* $rot\,\vec{A}=\vec{0}$ *b)* $rot\,\vec{A}=\left[2\left(y+z\right),0,0\right]$ *c)* $rot\,\vec{A}=\vec{0}$ *d)* $rot\,\vec{A}_{|P}=[0,0,-12]$

Odp 11.18.

a) $div\,\vec{A}=0$ *czyli* $\vec{A}$ *jest selenoidalne*

b) $rot\,\vec{A}=[-3x+2y-5,3y,6xy+2]$ *czyli* $\vec{A}$ *nie jest potencjalne*

c) $rot\,\vec{A}=\vec{0}$ *czyli* $\vec{A}$ *jest potencjalne*

d) $div\,\vec{A}=0$ *i* $rot\,\vec{A}=\vec{0}$ *czyli* $\vec{A}$ *jest harmoniczne*

Odp 11.19. *Wsk:* $F=\frac{m}{\left|\vec{PO}\right|^2}$ *oraz* $\vec{F}=-F\cdot\vec{OP}$*, gdzie* $\left|\vec{PO}\right|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.
Natężenie siły $\vec{F}$ *w punkcie* $P\left(x_0,y_0,z_0\right)$ *wynosi:* $\left|div\,\vec{F}_{|P}\right|=3\left(x_0^2+y_0^2+z_0^2\right)^{-\frac{3}{2}}|1-m|$.

12 Całki nieoznaczone

Zadanie 12.1. *Oblicz całki korzystając z podstawowych wzorów rachunku całkowego:*

a) $\int (2x + \pi - 8e)\, dx$ *b)* $\int \left(6x^2 + 8x + 3\right) dx$ *c)* $\int x\,(x-1)\,(x-2)\, dx$

d) $\int \left(1 + 2x^3\right)^2 dx$ *e)* $\int (7 + 2\sqrt[4]{x})^3\, dx$ *f)* $\int 6^{1+x} dx$

g) $\int \frac{5^{3x}+2}{5^x} dx$ *h)* $\int 3\,(1+e^x)^2\, dx$ *i)* $\int \frac{2x^2-2}{1-x^4} dx$

j) $\int \frac{x^2}{x^2+1} dx$ *k)* $\int \frac{\sqrt{x}-2\sqrt[3]{x^2}+1}{\sqrt[4]{x}} dx$ *l)* $\int \frac{x\sqrt[3]{x}+\sqrt[5]{x}}{x^2} dx$

ł) $\int \frac{1+\cos^2 x}{1+\cos 2x} dx$ *m)* $\int \frac{\cos 2x}{\cos x - \sin x} dx$

Zadanie 12.2. *Oblicz całki przez podstawienie:*

a) $\int (2x-3)^9 dx$ *b)* $\int x\sqrt{6-x^2} dx$ *c)* $\int \frac{x}{\sqrt[3]{x^2+5}} dx$ *d)* $\int \frac{2x}{x^4+1} dx$

e) $\int \frac{2^x \cdot 3^x}{9^x+4^x} dx$ *f)* $\int x e^{x^2} dx$ *g)* $\int \frac{e^x}{3+4e^x} dx$ *h)* $\int \frac{\frac{e^x}{6}+x}{\sqrt{e^x+3x^2}} dx$

i) $\int e^{\sin x} \cos x dx$ *j)* $\int \frac{dx}{x \ln x}$ *k)* $\int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x} dx$ *l)* $\int \frac{dx}{x \ln x \ln(\ln x)}$

ł) $\int \frac{dx}{\sin^2(2x+1)}$ *m)* $\int \frac{\sin x}{\sqrt{1+2\cos x}} dx$ *n)* $\int \sin^3 x \cos^5 x dx$ *o)* $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}(\arcsin x)^3}$

Zadanie 12.3. *Oblicz całki przez części:*

a) $\int \arcsin x dx$ *b)* $\int \log_{10} \frac{1}{x^2} dx$ *c)* $\int \ln\left(1+x^2\right) dx$ *d)* $\int \cos(\ln x) dx$

e) $\int x \cos x dx$ *f)* $\int x \operatorname{arc\,tg} x dx$ *g)* $\int x^2 e^{3x} dx$ *h)* $\int 3^x x^2 dx$

i) $\int x^2 \ln x dx$ *j)* $\int x^2 \sin x dx$ *k)* $\int e^x \cos x dx$ *l)* $\int (5x+1) \sin x \cos x dx$

ł) $\int \frac{\ln x}{x^3} dx$ *m)* $\int \frac{\ln^2 x}{\sqrt{x}} dx$ *n)* $\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{x+1}} dx$ *o)* $\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx$

Zadanie 12.4. *Oblicz całki:*

a) $\int \frac{dx}{x^2+8}$ *b)* $\int \frac{dx}{9x^2+16}$ *c)* $\int \frac{dx}{x^2+4x+5}$ *d)* $\int \frac{dx}{x^2-6x+13}$

e) $\int \frac{dx}{(3x^2+1)^2}$ *f)* $\int \frac{dx}{(x^2+9)^3}$ *g)* $\int \frac{dx}{(x^2-6x+10)^2}$ *h)* $\int \frac{dx}{(x^2+4x+8)^2}$

i) $\int \frac{x-3}{x^2-6x+5} dx$ *j)* $\int \frac{3x-2}{x^2+6x+9} dx$ *k)* $\int \frac{6x-3}{x^2+x+5} dx$ *l)* $\int \frac{7-8x}{2x^2-3x+1} dx$

ł) $\int \frac{5x-3}{(x^2+4x+5)^2} dx$ *m)* $\int \frac{5x+4}{(x^2-3x+4)^2} dx$ *n)* $\int \frac{dx}{2x^2+9x-5}$ *o)* $\int \frac{11x-1}{3x^2-5x-2} dx$

p) $\int \frac{x+1}{x^3-5x^2+4x-20} dx$ *r)* $\int \frac{x^3-3}{x^4+10x^2+25} dx$ *s)* $\int \frac{3x^3-5x^2+8x}{(x^2-2x+1)(x^2-1)} dx$ *t)* $\int \frac{x^4}{x^2-9} dx$

u) $\int \frac{2x^5+6x^3+1}{x^4+3x^2}dx$ w) $\int \frac{x^4+2x^3+5x^2+4x+2}{x^4+3x^2+2}dx$

Zadanie 12.5. *Obliczyć całki z funkcji niewymiernych:*

a) $\int \sqrt{9+x^2}\, dx$ b) $\int \sqrt{2-x^2}\, dx$ c) $\int \frac{10\sqrt{x^2-3}+6\sqrt{5-x^2}}{\sqrt{(x^2-3)(5-x^2)}}dx$

d) $\int \frac{dx}{\sqrt{3+2x-x^2}}$ e) $\int \frac{dx}{\sqrt{4-2x-x^2}}$ f) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+6x+4}}$

g) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-6x+15}}$ h) $\int \sqrt{x^2+2x+6}\, dx$ i) $\int \sqrt{x^2-6x+10}\, dx$

j) $\int \sqrt{3+4x-x^2}\, dx$ k) $\int \sqrt{3+2x-x^2}\, dx$ l) $\int \frac{x^2+4x}{\sqrt{x^2+2x+2}}dx$

ł) $\int \frac{6x^3-22x^2+21x-7}{\sqrt{x^2-4x+3}}dx$ m) $\int x\sqrt{3-2x-x^2}\, dx$ n) $\int (3x-2)\sqrt{x^2-2x}\, dx$

Zadanie 12.6. *Oblicz całki z funkcji niewymiernych:*

a) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$ b) $\int \frac{1+\sqrt[4]{x}}{x+\sqrt{x}}dx$ c) $\int \frac{xdx}{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}}$ d) $\int \frac{1-\sqrt{x+1}}{1+\sqrt[3]{x+1}}dx$

e) $\int \sqrt{\frac{1+x}{x}}\frac{dx}{x^2}$ f) $\int \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}\frac{dx}{x+1}$ g) $\int \sqrt{\frac{x-1}{x-2}}\frac{dx}{(x-1)^2}$ h) $\int \sqrt{\frac{x+2}{2x+3}}\frac{dx}{(x+2)(3x+5)}$

Zadanie 12.7. *Oblicz całki dwumienne:*

a) $\int \frac{\sqrt{x}\, dx}{\left(1+\sqrt[3]{x}\right)^2}$ b) $\int \frac{\left(4+3\sqrt[4]{x^3}\right)^2}{\sqrt[4]{x}}dx$ c) $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$ d) $\int x^5\sqrt[3]{(1+x^3)^2}dx$

e) $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}dx$ f) $\int \frac{dx}{x^2(2+x^3)^{\frac{5}{3}}}$ g) $\int \frac{dx}{x^4\sqrt{1+x^2}}$ h) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^3}\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x^3}}}$

Zadanie 12.8. *Oblicz całki z funkcji trygonometrycznych:*

a) $\int \frac{dx}{3\sin x-4\cos x}$ b) $\int \frac{1-2\cos x}{5-4\cos x}dx$ c) $\int \frac{2+\sin x}{\sin x(1+\cos x)}dx$

d) $\int \frac{dx}{\sin^2 x-4\sin x\cos x+5\cos^2 x}$ e) $\int \frac{\sin x\cos x}{\cos^2 x+1}dx$ f) $\int \frac{dx}{\sin^2 x+\mathrm{tg}^2 x}$

Zadanie 12.9. *Oblicz całki z funkcji trygonometrycznych za pomocą odpowiednich wzorów:*

a) $\int \sin^4 3x\, dx$ b) $\int \cos^5 x\, dx$ c) $\int \frac{dx}{\sin^3 x}$ d) $\int \frac{dx}{\cos^2 \frac{x}{3}}$

e) $\int \mathrm{tg}^3 6x\, dx$ f) $\int \mathrm{ctg}^4 \frac{x}{2}\, dx$ g) $\int \frac{dx}{\mathrm{ctg}^2(3x-1)}$ h) $\int \sin^3 x\cos^4 x\, dx$

i) $\int \sin^4 \frac{x}{5}\cos^2 \frac{x}{5}\, dx$ j) $\int \sin 9x\sin x\, dx$ k) $\int \sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{3}\, dx$ l) $\int \cos\frac{x}{2}\cos 4x\, dx$

Wskazówki i odpowiedzi

Odp 12.1.

a) $x^2+\pi x-8ex+C$ *b)* $2x^3+4x^2+3x+C$ *c)* $\frac{1}{4}x^4-x^3+x^2+C$

d) $x+x^4+\frac{4}{7}x^7+C$ *e)* $343x+\frac{1176}{5}x^{\frac{5}{4}}+\frac{56}{3}x^{\frac{3}{2}}+\frac{32}{7}x^{\frac{7}{4}}+C$ *f)* $\frac{6^{x+1}}{\ln 6}+C$

g) $\frac{5^{2x}-4\cdot 5^{-x}}{2\ln 5}+C$ *h)* $3\left(x+2e^x+\frac{1}{2}e^{2x}\right)+C$ *i)* $-2\operatorname{arc\,tg} x+C$

j) $x-\operatorname{arc\,tg} x+C$ *k)* $\frac{4}{5}x^{\frac{5}{4}}-\frac{24}{17}x^{\frac{17}{12}}+\frac{4}{3}x^{\frac{3}{4}}+C$ *l)* $3x^{\frac{1}{3}}-\frac{5}{4}x^{-\frac{4}{5}}+C$

ł) $\frac{1}{2}\operatorname{tg} x+\frac{1}{2}x+C$ *m)* $\sin x-\cos x+C$

Odp 12.2.

a) $\frac{1}{20}(2x-3)^{10}+C$ *b)* $-\frac{1}{3}\left(6-x^2\right)^{\frac{3}{2}}+C$ *c)* $\frac{3}{4}\left(x^2+5\right)^{\frac{2}{3}}+C$

d) $\operatorname{arc\,tg} x^2+C$ *e)* $\frac{1}{\ln\frac{3}{2}}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{3}{2}\right)^x+C$ *f)* $\frac{1}{2}e^{x^2}+C$

g) $\frac{1}{4}\ln|3+4e^x|+C$ *h)* $\frac{1}{3}\left(e^x+3x^2\right)^{\frac{1}{2}}+C$ *i)* $e^{\sin x}+C$

j) $\ln|\ln x|+C$ *k)* $\frac{2}{3}(1+\ln x)^{\frac{3}{2}}+C$ *l)* $\ln|\ln(\ln x)|+C$

ł) $-\frac{1}{2}\operatorname{ctg}(2x+1)+C$ *m)* $-(1+2\cos x)^{\frac{1}{2}}+C$ *n)* $-\frac{1}{6}\cos^6 x+\frac{1}{8}\cos^8 x+C$

o) $-\frac{1}{2}(\arcsin x)^{-2}+C$

Odp 12.3.

a) $x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}+C$ *b)* $x\log_{10}\frac{1}{x^2}+\frac{2}{\ln 10}x+C$

c) $x\ln\left(1+x^2\right)-2x+2\operatorname{arc\,tg} x+C$ *d)* $\frac{1}{2}x(\cos(\ln x)+\sin(\ln x))+C$

e) $x\sin x+\cos x+C$ *f)* $\frac{1}{2}\left(x^2\operatorname{arc\,tg} x-x+\operatorname{arc\,tg} x\right)+C$

g) $\frac{1}{3}x^2e^{3x}-\frac{2}{9}xe^{3x}+\frac{2}{27}e^{3x}+C$ *h)* $\frac{1}{\ln 3}x^2 3^x-\frac{2}{\ln^2 3}x3^x+\frac{2}{\ln^3 3}3^x+C$

i) $\frac{1}{3}x^3\ln x-\frac{1}{9}x^3+C$ *j)* $-x^2\cos x+2x\sin x+2\cos x+C$

k) $\frac{1}{2}e^x(\sin x+\cos x)+C$ *l)* $-\frac{1}{2}(5x+1)\cos^2 x+\frac{5}{2}x+\frac{5}{4}\sin 2x+C$

ł) $-\frac{\ln x}{2x^2}-\frac{1}{4x^2}+C$ *m)* $2x^{\frac{1}{2}}\ln^2 x-8x^{\frac{1}{2}}\ln x+16x^{\frac{1}{2}}+C$

n) $2(x+1)^{\frac{1}{2}}\arcsin x+4(1-x)^{\frac{1}{2}}+C$ *o)* $-x\sqrt{1-x^2}+\arcsin x+C$

Odp 12.4.

a) $\frac{\sqrt{8}}{8}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{\sqrt{8}}+C$

b) $\frac{1}{12}\operatorname{arc\,tg}\frac{3}{4}x+C$

c) $\operatorname{arc\,tg}(x+2)+C$

d) $\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}\frac{x-3}{2}+C$

e) $\frac{x}{2(3x^2+1)}+\frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\sqrt{3}x+C$

f) $\frac{x}{36(x^2+9)^2}+\frac{x}{216(x^2+9)}+\frac{1}{648}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{3}+C$

g) $\frac{x-3}{2(x^2-6x+10)}+\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}(x-3)+C$

h) $\frac{x+2}{8(x^2+4x+8)}+\frac{1}{16}\operatorname{arc\,tg}\frac{x+2}{2}+C$

i) $\frac{1}{2}\ln\left|x^2-6x+5\right|+C$

j) $\frac{3}{2}\ln\left|x^2+6x+9\right|+\frac{11}{x-3}+C$

k) $3\ln\left|x^2+x+5\right|-\frac{12}{\sqrt{19}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2}{\sqrt{19}}\left(x+\frac{1}{2}\right)+C$

l) $-2\ln\left|2x^2-3x+1\right|+\ln|x-1|-\ln\left|x-\frac{1}{2}\right|+C$

ł) $-\frac{5}{x^2+4x+5}-\frac{13(x+2)}{2(x^2+4x+5)}-\frac{13}{2}\operatorname{arc\,tg}(x+2)+C$

m) $-\frac{5}{x^2-3x+4}+\frac{23\left(x-\frac{3}{2}\right)}{14(x^2-3x+4)}+\frac{23\sqrt{7}}{49}\operatorname{arc\,tg}\frac{2}{\sqrt{7}}\left(x-\frac{3}{2}\right)+C$

n) $-\frac{1}{11}\ln|x+5|+\frac{1}{11}\ln\left|x-\frac{1}{2}\right|+C$

o) $2\ln|3x+1|+3\ln|x-2|+C$

p) $\frac{6}{29}\ln|x-5|-\frac{3}{29}\ln\left|x^2+4\right|-\frac{1}{58}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{2}+C$

r) $\frac{1}{2}\ln\left|x^2+5\right|+\frac{5}{2(x^2+5)}-\frac{3x}{10(x^2+5)}-\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{\sqrt{5}}+C$

s) $\ln|x-1|-\frac{2}{x-1}-\frac{3}{2(x-1)^2}+2\ln|x+1|+C$

t) $\frac{1}{3}x^3+9x+\frac{27}{2}\ln|x-3|-\frac{27}{2}\ln|x+3|+C$

u) $x^2-\frac{1}{3x}-\frac{\sqrt{3}}{9}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{\sqrt{3}}+C$

w) $x+\ln\left|x^2+1\right|-2\operatorname{arc\,tg}x+\frac{4}{\sqrt{2}}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{\sqrt{2}}+C$

Odp 12.5.

a) $\frac{1}{2}\left(x\sqrt{9+x^2}\right)+9\ln\left|x+\sqrt{9+x^2}\right|+C$

b) $\frac{1}{2}\left(x\sqrt{2-x^2}\right)+2\arcsin\frac{x}{\sqrt{2}}+C$

c) $10\arcsin\frac{x}{\sqrt{5}}+6\ln\left|\frac{x}{\sqrt{3}}+\sqrt{\frac{x^2}{3}-1}\right|+C$

d) $\arcsin \frac{x-1}{2} + C$

e) $\arcsin \frac{x+1}{\sqrt{5}} + C$

f) $\ln \left| x + 3 + \sqrt{x^2 + 6x + 4} \right| + C$

g) $\ln \left| x - 3 + \sqrt{x^2 - 6x + 15} \right| + C$

h) $\frac{1}{2}(x+1)\sqrt{x^2 + 2x + 6} + \frac{5}{2} \ln \left| \frac{x+1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}}\sqrt{x^2 + 2x + 6} \right| + C$

i) $\frac{1}{2}\left[(x-3)\sqrt{x^2 - 6x + 10} + \ln \left| x - 3 + \sqrt{x^2 - 6x + 10} \right|\right] + C$

j) $\frac{1}{2}(x-2)\sqrt{3 + 4x - x^2} + \frac{7}{2} \arcsin \frac{x-2}{\sqrt{7}} + C$

k) $\frac{1}{2}(x-1)\sqrt{3 + 2x - x^2} + 2 \arcsin \frac{x-1}{2} + C$

l) $\left(\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}\right)\sqrt{x^2 + 2x + 2} - \frac{7}{2} \ln \left| x + 1 + \sqrt{x^2 + 2x + 2} \right| + C$

ł) $\left(2x^2 - x + 3\right)\sqrt{x^2 - 4x + 3} + 2 \ln \left| x - 2 + \sqrt{x^2 - 4x + 3} \right| + C$

m) $\left(\frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{6}x - \frac{3}{2}\right)\sqrt{3 - 2x - x^2} - 2 \arcsin \frac{x+1}{\sqrt{7}} + C$

n) $\left(x^2 - \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}\right)\sqrt{x^2 - 2x} - \frac{1}{2} \ln \left| x - 1 + \sqrt{x^2 - 2x} \right| + C$

Odp 12.6.

a) $2x^{\frac{1}{2}} - 3x^{\frac{1}{3}} + 6x^{\frac{1}{6}} - 6 \ln \left| x^{\frac{1}{6}} + 1 \right| + C$

b) $4x^{\frac{1}{4}} + 2 \ln \left| x^{\frac{1}{2}} + 1 \right| - 4 \operatorname{arc\,tg} x^{\frac{1}{4}} + C$

c) $6\left[\frac{1}{9}(x+1)^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{8}(x+1)^{\frac{4}{3}} + \frac{1}{7}(x+1)^{\frac{7}{6}} - \frac{1}{6}(x+1) - \frac{1}{5}(x+1)^{\frac{5}{6}} - \frac{1}{4}(x+1)^{\frac{2}{3}}\right] + C$

d) $-\frac{6}{7}(x+1)^{\frac{7}{6}} + \frac{6}{5}(x+1)^{\frac{5}{6}} + \frac{3}{2}(x+1)^{\frac{2}{3}} - 2(x+1)^{\frac{1}{2}} - 3(x+1)^{\frac{1}{3}} + 6(x+1)^{\frac{1}{6}} -$
$+ 6 \operatorname{arc\,tg}(x+1)^{\frac{1}{6}} + 3 \ln \left| (x+1)^{\frac{1}{3}} + 1 \right| + C$

e) $-\frac{2}{3}\left(\frac{1+x}{x}\right)^{\frac{3}{2}} + C$

f) $\ln \left| \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} + 1 \right| - \ln \left| \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} - 1 \right| + C$

g) $2\sqrt{\frac{x-2}{x-1}} + C$

h) $-2 \operatorname{arc\,tg} \sqrt{\frac{x+2}{2x+3}} + C$

Odp 12.7.

a) $\frac{6}{5}x^{\frac{5}{6}} - \frac{2}{3}x^{\frac{1}{2}} + 3x^{\frac{1}{6}} - 3 \operatorname{arc\,tg} x^{\frac{1}{6}} + 21 \frac{x^{\frac{1}{6}}}{1 + x^{\frac{1}{3}}} + C$

b) $\frac{64}{3}x^{\frac{3}{4}} + 4x^{\frac{3}{2}} + x^{\frac{9}{4}} + C$

c) $\sqrt{1 - x^2} + \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} + C$

d) $\frac{1}{8}\left(1+x^3\right)^{\frac{8}{3}} - \frac{1}{5}\left(1+x^3\right)^{\frac{5}{3}} + C$

e) $\frac{12}{7}\left(1+x^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{7}{3}} - 3\left(1+x^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{4}{3}} + C$

f) $-\frac{1}{4}\left(2x^{-3}+1\right)^{\frac{1}{3}} - \frac{1}{8}\left(2x^{-3}+1\right)^{-\frac{2}{3}} + C$

g) $-\frac{1}{3}\left(x^{-2}+1\right)^{\frac{3}{2}} + \left(x^{-2}+1\right)^{\frac{1}{2}} + C$

h) $-2\left(x^{-\frac{3}{4}}+1\right)^{\frac{2}{3}} + C$

Odp 12.8.

a) $\frac{1}{5}\left[\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\right| - \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}+2\right|\right] + C$

b) $-3\operatorname{arc\,tg}\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{3}\operatorname{arc\,tg}\left(3\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right) + C$

c) $\frac{1}{2}\operatorname{tg}^2\frac{x}{2} + \operatorname{tg}\frac{x}{2} + \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C$

d) $\operatorname{arc\,tg}\left(\operatorname{tg}x-2\right) + C$

e) $\frac{1}{2}\left[\ln\left|\operatorname{tg}^2x+1\right| - \ln\left|\operatorname{tg}^2x+2\right|\right] + C$

f) $-\frac{1}{2}\operatorname{ctg}x - \frac{\sqrt{2}}{4}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{tg}x\right) + C$

Odp 12.9.

a) $-\frac{1}{12}\sin^3 3x\cos 3x - \frac{1}{8}\sin 3x\cos 3x + \frac{3}{8}x + C$

b) $\frac{1}{5}\sin x\cos^4 x + \frac{4}{15}\sin x\cos^2 x + \frac{8}{15}\sin x + C$

c) $-\frac{\cos x}{2\sin^2 x} + \frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C$

d) $3\operatorname{tg}\frac{x}{3} + C$

e) $\frac{1}{12}\operatorname{tg}^2 6x + \frac{1}{6}\ln\left|\cos 6x\right| + C$

f) $-\frac{2}{3}\operatorname{ctg}^3\frac{x}{2} + \operatorname{ctg}\frac{x}{2} + x + C$

g) $\frac{1}{3}\left[\operatorname{tg}(3x-1) - (3x-1)\right] + C$

h) $\frac{1}{7}\cos^7 x - \frac{1}{5}\cos^5 x + C$

i) $\frac{5}{6}\sin^5\frac{x}{5}\cos\frac{x}{5} - \frac{5}{24}\sin^3\frac{x}{5}\cos\frac{x}{5} - \frac{5}{16}\sin\frac{x}{5}\cos\frac{x}{5} + \frac{x}{16} + C$

j) $-\frac{1}{20}\sin 10x + \frac{1}{16}\sin 8x + C$

k) $-\frac{3}{5}\cos\frac{5}{6}x - 3\cos\frac{x}{6} + C$

l) $\frac{1}{9}\sin\frac{9}{2}x + \frac{1}{7}\sin\frac{7}{2}x + C$

13 Całki oznaczone

Zadanie 13.1. *Oblicz całki oznaczone korzystając z podstawowych wzorów rachunku całkowego:*

a) $\int_0^4 (-x^2 + 6x - 4)\, dx$

b) $\int_1^8 \frac{x\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}}{x^2} dx$

c) $\int_{-1}^1 6^{1+x} dx$

d) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 2x}{\cos x - \sin x} dx$

e) $\int_{-1}^2 f(x)\, dx$, *jeżeli* $f(x) = \begin{cases} x^2 + 5 & x \in \langle -1, 0) \\ -2x + 5 & x \in \langle 0, 2 \rangle \end{cases}$

f) $\int_{-3}^3 f(x)\, dx$, *jeżeli* $f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \langle -3, 0 \rangle \\ -\frac{1}{2}x + 1 & x \in (0, 2) \\ e^{x-2} - 1 & x \in \langle 2, 3 \rangle \end{cases}$

Zadanie 13.2. *Oblicz całki oznaczone za pomocą poznanych metod całkowania:*

a) $\int_{\ln 3}^0 \frac{1-e^x}{1+e^x} dx$ *b)* $\int_0^4 \left(1 + e^{\frac{x}{4}}\right) dx$ *c)* $\int_{-1}^7 \frac{dx}{\sqrt{3x+4}}$

d) $\int_0^1 \frac{dx}{(2x+1)^3}$ *e)* $\int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{dx}{e^x - e^{-x}}$ *f)* $\int_1^e \frac{\sqrt[4]{1+\ln x}}{x} dx$

g) $\int_1^8 \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$ *h)* $\int_{\frac{1}{8}}^{\frac{1}{3}} \sqrt{\frac{1+x}{x}} \frac{dx}{x^2}$ *i)* $\int_1^{16} \frac{\left(4+3\sqrt[4]{x^3}\right)^2}{\sqrt[4]{x}} dx$

j) $\int_{\frac{1}{16}}^1 \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}} dx$ *k)* $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x\cos x}{\sin^3 x} dx$ *l)* $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2+\cos x}$

ł) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{25+\sin^2 x} dx$ *m)* $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{(2+\sin x)^2}$ *n)* $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x\, dx$

o) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \operatorname{ctg}^4 x\, dx$ *p)* $\int_{-\pi}^{\pi} \sin 3x \sin 5x\, dx$ *r)* $\int_0^{\pi} \cos\frac{x}{2} \cos\frac{3x}{2}\, dx$

s) $\int_0^1 \arcsin x\, dx$ *t)* $\int_0^{\frac{\pi}{6}} (x+3)\sin 3x\, dx$ *u)* $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x dx}{\cos^2 x}$

w) $\int_1^e \ln^2 x\, dx$ *x)* $\int_0^2 \frac{x+3}{x^2+4} dx$ *y)* $\int_{-2}^4 \frac{dx}{x^2+4x+5}$

z) $\int_0^1 \frac{\frac{1}{2}x+2}{x^2-6x+13} dx$ *α)* $\int_{-1}^0 \frac{dx}{\sqrt{4-2x-x^2}}$ *β)* $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+6x+4}}$

γ) $\int_0^1 \frac{x dx}{x^2+3x+2}$ *δ)* $\int_1^2 \frac{dx}{x^2+5x+4} dx$ *ϵ)* $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{2x-3}{\sqrt{3+4x-4x^2}} dx$

Zadanie 13.3. *Oblicz pole figury geometrycznej ograniczonej podanymi krzywymi:*

a) $y = x^4$, $y = 2 - x^2$

b) $y = 2^x$, $y = x + 1$

c) $y = -\sqrt{9 - x^2}$, $y = 0$

d) $y = e^{-x}$, $y = e^{3x}$, $y = \sqrt{e}$

e) $xy^2 = 1$, $xy^2 = 4$, $y = 1$, $y = 2$

f) $6x = y^3 - 16y$, $24x = y^3 - 16y$

g) $y = \operatorname{arc\,tg} x$, $y = \operatorname{arc\,ctg} x$, $x = 0$

h) $4y = 8x - x^2$, $4y = x + 6$

i) $y = \sqrt{3} \cos x$, $y = \sin x$, $x = -\frac{\pi}{2}$, $x = \frac{\pi}{3}$

j) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

Zadanie 13.4. *Oblicz długość łuku krzywej:*

a) $y = \ln x$ *dla* $\sqrt{3} \leqslant x \leqslant 2\sqrt{2}$

b) $y = \ln \cos x$ *dla* $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{3}$

c) $y = \sqrt{1 - x^2}$ *dla* $0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}$

d) $y = \arcsin (e^{-x})$ *dla* $0 \leqslant x \leqslant 1$

e) $y = x^2 - 6x + 9$ *dla* $0 \leqslant x \leqslant 3$

f) $(x - 2)^2 + y^2 = 1$

Zadanie 13.5. *Oblicz objętość bryły powstałej z obrotu podanej figury F wokół wskazanej osi:*

a) F: $0 \leqslant y \leqslant \sqrt{x} e^{-x}$, $0 \leqslant x \leqslant 4$, OX

b) F: $0 \leqslant y \leqslant \cos x$, $-\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$, OX

c) F: $\ln^2 x \leqslant y \leqslant \ln x$, $1 \leqslant x \leqslant e$, OX

d) F: $2y = x^2$, $2x + 2y - 3 = 0$, OX

e) F: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, OY

f) F: $x^2 \leqslant y \leqslant \sqrt{x}$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, OY

Zadanie 13.6. *Oblicz pole powierzchni bryły powstałej z obrotu figury F wokół wskazanej osi:*

a) F: $0 \leqslant y \leqslant \sqrt{x}$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, OX

b) F: $0 \leqslant y \leqslant \sqrt{4 - x^2}$, $-1 \leqslant x \leqslant 1$, OX

c) F: $0 \leqslant y \leqslant \sin x$, $0 \leqslant x \leqslant \pi$, OX

d) F: $0 \leqslant y \leqslant \sqrt{x}\left(1 - \frac{x}{3}\right)$, $1 \leqslant x \leqslant 3$, OX

e) F: $0 \leqslant y \leqslant 2x - 1$, $0 \leqslant x \leqslant 3$, OY

f) F: $0 \leqslant y \leqslant 2\sqrt{x}$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, OY

Zadanie 13.7. *Prędkość pociągu zmienia się i po czasie t minut od startu opisuje się zależnością $v = 100 + e^{-3t} \sin 2\pi t$. Jaką odległość przebędzie pociąg w czasie od $t = 1$ do $t = 3$?*

Zadanie 13.8. *Samolot zwiadowczy S i rakieta R, która ma go zestrzelić, poruszają się po prostej. W chwili $t = 0$ odległość między nimi wynosiła $d = 9$ km. Szybkość samolotu w chwili t, gdzie $t \geqslant 0$, wyraża się wzorem $v_S(t) = 1 + 16t$ km/min, a szybkość rakiety $v_R(t) = 1 + 4t^3$ km/min. Po jakim czasie rakieta trafi w samolot?*

Zadanie 13.9. *Przebieg reakcji chemicznej można opisać równaniem: $\int_{x_0}^{x} \frac{du}{(80-u)(60-u)} = kt$, gdzie $k = const$. Zakładamy, że w reakcji biorą udział dwie substancje w ilości 80 kg i 60 kg. Wyznacz zależność $x = x(t)$ oznaczającą ilość kg produktu reakcji po t minutach wiedząc, że $x_0 = x(0) = 0$.*

Zadanie 13.10. *Ilość ciepła potrzebna do ogrzania ciała o masie m i cieple właściwym c od temperatury t_1 do t_2 wyraża się wzorem $q = m \int_{t_1}^{t_2} c\, dt$. Gazy wieloatomowe wykazują zależność ciepła właściwego od temperatury według równania $c = c_0 + at + bt^2$. Oblicz ilość ciepła potrzebną do ogrzania danej masy gazu m od temperatury $t_1 = 0$ do $t_2 = T$.*

Zadanie 13.11. *Oblicz całki niewłaściwe:*

a) $\int_0^{+\infty} e^{-x}\, dx$	b) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+1}$	c) $\int_0^1 \frac{dx}{x}$	d) $\int_{-1}^{2} \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}$
e) $\int_0^2 \frac{x^3 dx}{\sqrt{4-x^2}}$	f) $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^3}\, dx$	g) $\int_{-\infty}^{0} x e^x\, dx$	h) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2}$
i) $\int_0^1 \ln x\, dx$	j) $\int_2^3 \frac{x dx}{\sqrt[4]{x^2-4}}$	k) $\int_0^2 \frac{dx}{(x-1)^2}$	l) $\int_{-2}^{2} \frac{x dx}{x^2-1}$

Wskazówki i odpowiedzi

Odp 13.1. *a)* $\frac{2}{3}$ *b)* $5-\frac{\sqrt{2}}{2}$ *c)* $\frac{35}{\ln 6}$ *d)* 1 *e)* $\frac{2}{3}$ *f)* $e+2$

Odp 13.2.

a) $\ln\frac{4}{3}$ *b)* $4e$ *c)* $\frac{8}{3}$

d) $\frac{2}{9}$ *e)* $\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$ *f)* $\frac{4}{5}\left(\sqrt[4]{2}-1\right)$

g) $10\sqrt{2}-17+6\ln\frac{2}{\sqrt{2}+1}$ *h)* $12\frac{2}{3}$ *i)* $3201\frac{1}{3}$

j) $12\left[\frac{1}{7}\cdot 2^{\frac{7}{3}}-\frac{1}{4}\cdot 2^{\frac{4}{3}}-\frac{1}{7}\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{7}{3}}+\frac{1}{4}\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{4}{3}}\right]$ *k)* $\frac{1}{2}$ *l)* $\frac{\sqrt{3}\pi}{9}$

ł) $\frac{1}{5}\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{5}-\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{10}\right)$ *m)* $\frac{\sqrt{3}\pi}{27}-\frac{1}{6}$ *n)* $\frac{4}{3}$

o) $\frac{8}{9}+\frac{\pi}{6}-\frac{2\sqrt{3}}{3}$ *p)* 0 *r)* 1

s) $\frac{\pi}{2}-1$ *t)* $\frac{10}{9}$ *u)* $\frac{\pi}{4}+\ln\frac{\sqrt{2}}{2}$

w) $e-2$ *x)* $\frac{1}{2}\ln 2+\frac{3\pi}{8}$ *y)* $\operatorname{arc\,tg} 6$

z) $\frac{1}{4}\ln\frac{8}{13}+\frac{7}{4}\left(\operatorname{arc\,tg} 2-\operatorname{arc\,tg}\frac{3}{2}\right)$ *α)* $\arcsin\frac{1}{\sqrt{5}}$ *β)* $\ln\frac{4+\sqrt{11}}{5}$

γ) $2\ln 3-3\ln 2$ *δ)* $\frac{1}{3}\ln\frac{5}{4}$ *ϵ)* $1-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{pi}{6}$

Odp 13.3.

a) $|P|=\int_{-1}^{1}\left(2-x^2-x^4\right)dx=\frac{44}{15}$

b) $|P|=\int_{0}^{1}(x+1-2^x)dx=\frac{3}{2}-\frac{1}{\ln 2}$

c) $|P|=\int_{-3}^{3}\sqrt{9-x^2}dx=\frac{9}{2}\pi$

d) $|P|=\int_{-\frac{1}{2}}^{0}(\sqrt{e}-e^{-x})dx+\int_{0}^{\frac{1}{6}}\left(\sqrt{e}-e^{3x}\right)dx=\frac{4-2\sqrt{e}}{3}$

e) $|P|=\int_{\frac{1}{4}}^{1}\left(2-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx+\int_{1}^{4}\left(\frac{2}{\sqrt{x}}-1\right)dx=\frac{3}{2}$

f) $|P|=2\int_{0}^{4}\left[\frac{1}{24}\left(y^3-16y\right)-\frac{1}{4}\left(y^3-16y\right)\right]dy=16$

g) $|P|=\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\operatorname{tg} y dy+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\operatorname{ctg} y dy=\ln 2$

h) $|P|=\int_{1}^{6}\left[\frac{1}{4}\left(8x-x^2\right)-\frac{1}{4}(x+6)\right]dx=\frac{125}{24}$

i) $|P|=-\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\sin x dx+\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\sqrt{3}\cos x dx+\int_{0}^{\frac{\pi}{3}}\left(\sqrt{3}\cos x-\sin x\right)dx=2+\sqrt{3}$

j) $|P|=4\int_{0}^{a}\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}dx=ab\pi$

Odp 13.4.
a) $1+\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$ *b)* $\ln\left(2+\sqrt{3}\right)$ *c)* $\frac{\pi}{6}$ *d)* $\ln\left(e+\sqrt{e^2-1}\right)$ *e)* $-\frac{1}{4}\left(-6\sqrt{37}+\ln\left|-6+\sqrt{37}\right|\right)$
f) 2π

Odp 13.5. *a)* $\frac{\pi}{4}\left(1-9e^{-8}\right)$ *b)* $\frac{\pi^2}{2}$ *c)* $\pi\left(22-8e\right)$ *d)* $\frac{91}{3}$ *e)* $\frac{4}{3}\pi a^2 b$ *f)* $\frac{3}{10}\pi$

Odp 13.6.
a) $\frac{\pi}{6}\left(5\sqrt{5}-1\right)$ *b)* 8π *c)* $\pi\left(2\sqrt{2}+\ln\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right)$ *d)* $\frac{16}{9}\pi$ *e)* $9\sqrt{5}\pi$ *f)* $\frac{1}{2}\pi\left[3\sqrt{2}-\ln\left(1+\sqrt{2}\right)\right]$

Odp 13.7. $s=200-\frac{2\pi}{4\pi^2+9}\left(e^{-9}-e^{-3}\right)$

Odp 13.8. $3\ min$

Odp 13.9. $x\left(t\right)=\frac{240\left(e^{20kt}-1\right)}{3e^{20kt}-4}$

Odp 13.10. $q=m\left(c_0T+\frac{1}{2}aT^2+\frac{1}{3}bT^3\right)$

Odp 13.11.

a) 1 *b)* π *c)* $+\infty$ *d)* $3\left(\sqrt[3]{2}+1\right)$ *e)* $\frac{16}{3}$ *f)* $\frac{1}{4}$

g) -1 *h)* π *i)* -1 *j)* $\frac{2}{3}\sqrt[4]{125}$ *k)* $+\infty$ *l)* $+\infty-\infty$

14 Szeregi funkcyjne

Zadanie 14.1. *Wyznacz środek, współczynniki, promień zbieżności oraz przedział zbieżności szeregu potęgowego:*

a) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{5}{3}\right)^n (x+5)^n$ *b)* $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{2^n}$

c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(6-3x)^n}{2^n+3^n}$ *d)* $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^n(n+1)}$

e) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n!}$ *f)* $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n (4-x)^n$

g) $\sum_{n=0}^{\infty} (x-2)^n \sin\frac{1}{n}$ *h)* $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(n+1)}{2^n} x^n$

Zadanie 14.2. *Wyznacz szereg Taylora w danym punkcie x_0 oraz szereg Maclaurina funkcji:*

a) $f(x) = e^x$ *dla* $x_0 = 1$

b) $f(x) = \sin x$ *dla* $x_0 = \pi$

c) $f(x) = \cos x$ *dla* $x_0 = \frac{\pi}{2}$

Wskazówki i odpowiedzi

Odp 14.1.

a) $x_0 = -5$, $c_n = \left(\frac{5}{3}\right)^n$, $R = \frac{3}{5}$, *szereg zbieżny dla* $x \in \left(-5\frac{3}{5}; -4\frac{2}{5}\right)$

b) $x_0 = 3$, $c_n = \frac{1}{2^n}$, $R = 2$, *szereg zbieżny dla* $x \in (1; 5)$

c) $x_0 = 2$, $c_n = \frac{(-1)^n \cdot 3^n}{2^n + 3^n}$, $R = 1$, *szereg zbieżny dla* $x \in (1; 3)$

d) $x_0 = 0$, $c_n = \frac{1}{2^n(n+1)}$, $R = 2$, *szereg zbieżny dla* $x \in \langle -2; 2)$

e) $x_0 = 0$, $c_n = \frac{(-1)^n}{n!}$, $R = +\infty$, *szereg zbieżny dla* $x \in \mathbb{R}$

f) $x_0 = 4$, $c_n = (-1)^n \cdot 2^n$, $R = \frac{1}{2}$, *szereg zbieżny dla* $x \in \left(3\frac{1}{2}; 4\frac{1}{2}\right)$

g) $x_0 = 2$, $c_n = \sin\frac{1}{n}$, $R = 1$, *szereg zbieżny dla* $x \in \langle 1; 3)$

h) $x_0 = 0$, $c_n = \frac{n(n+1)}{2^n}$, $R = 2$, *szereg zbieżny dla* $x \in (-2; 2)$

Odp 14.2.

a) szereg Taylora w $x_0 = 1$: $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e}{n!} (x-1)^n$

szereg Maclaurina: $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

b) szereg Taylora w $x_0 = \pi$: $\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)!} (x-\pi)^{2n+1}$

szereg Maclaurina: $\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$

c) szereg Taylora w $x_0 = \frac{\pi}{2}$: $\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)!} \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^{2n+1}$

szereg Maclaurina: $\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$

15 Szeregi Fouriera

Zadanie 15.1. *Rozwiń funkcję w szereg Fouriera w podanym przedziale:*

a) $f(x) = |x|$ *dla* $x \in \langle -\pi, \pi \rangle$

b) $f(x) = sgn\,(x)$ *dla* $x \in \langle -\pi, \pi \rangle$

c) $f(x) = \begin{cases} 0 & x \in \langle -\pi, 0) \\ x & x \in \langle 0, \pi \rangle \end{cases}$

Zadanie 15.2. *Rozwiń funkcję w szereg Fouriera w podanym przedziale według sinusów oraz cosinusów:*

a) $f(x) = \begin{cases} x & x \in \langle 0, 1) \\ 2 - x & x \in \langle 1, 2 \rangle \end{cases}$

b) $f(x) = 2 - \frac{x}{2}$ *dla* $x \in \langle 0, 4 \rangle$

Wskazówki i odpowiedzi

Odp 15.1.

a) $|x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \cos(2n-1)x$

b) $sgn(x) = -\frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \sin(2n-1)x$

c) $f(x) = \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{2}{\pi(2n-1)} \cos(2n-1)x + \frac{2x}{\pi(2n-1)} \sin(2n-1)x \right)$

Odp 15.2.

a) $f(x) = \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2} \sin \frac{(2n-1)\pi x}{2}$

$f(x) = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \cos(2n-1)\pi x$

b) $f(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi x}{4}$

$f(x) = 1 + \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \cos \frac{(2n-1)\pi x}{4}$

16 Całki wielokrotne

Zadanie 16.1. *Oblicz całki iterowane:*

a) $\int_0^2\int_0^3\left(x^2+2xy\right)dy\,dx$ *b)* $\int_0^1\int_x^{2x}(x-y+1)\ dy\,dx$ *c)* $\int_2^0\int_0^{y^2}(x+2y)\,dx\,dy$

d) $\int_{-2}^4\int_0^y\frac{y^3}{x^2+y^2}\,dx\,dy$ *e)* $\int_0^1\int_0^y e^{\frac{x}{y}}\,dx\,dy$ *f)* $\int_0^5\int_0^{5-x}\sqrt{4+x+y}\,dy\,dx$

g) $\int_0^1\int_0^x\int_0^{xy}x^3y^2z\,dz\,dy\,dx$ *h)* $\int_0^1\int_0^3\int_0^5\left(x^2+y^2+z^2\right)dx\,dy\,dz$ *i)* $\int_0^1\int_0^{1-x}\int_0^{1-y}xyz\,dz\,dy\,dx$

j) $\int_0^1\int_0^{\sqrt{x}}\int_{1-x}^{2-2x}y\,dz\,dy\,dx$ *k)* $\int_{-1}^1\int_{x^2}^1\int_0^2(4+z)\,dz\,dy\,dx$ *l)* $\int_0^2\int_{\sqrt{2y-y^2}}^2\int_0^3xz^2\,dz\,dx\,dy$

Zadanie 16.2. *Zamień kolejność całkowania w całkach:*

a) $\int_{-2}^2\int_{x^2}^4 f(x,y)\ dy\,dx$ *b)* $\int_2^4\int_y^4 f(x,y)\ dx\,dy$ *c)* $\int_1^3\int_0^{2y} f(x,y)\ dx\,dy$

d) $\int_1^3\int_0^{2y} f(x,y)\ dx\,dy$ *e)* $\int_{-2}^1\int_{y^2}^4 f(x,y)\ dx\,dy$ *f)* $\int_{-\sqrt{3}}^1\int_{-\sqrt{4-x^2}}^0 f(x,y)\ dy\,dx$

Zadanie 16.3. *Oblicz całki podwójne, gdzie D jest obszarem całkowania:*

1. $\int\int_D\ (x+y)\ dx\,dy$*, gdzie:*
   - *a) D jest ograniczony przez krzywe* $x=0,y=0,x+y=3$
   - *b) D jest ograniczony przez krzywe* $x=4,y=0,y=x$
2. $\int\int_D xy\,dx\,dy$*, gdzie:*
   - *a) D jest ograniczony przez krzywe* $x=0,x=7,y=0,y=5$
   - *b) D jest elipsą* $4x^2+y^2\leqslant 4$
   - *c) D jest ograniczony przez krzywe:* $y=x-4,y^2=2x$
3. $\int\int_D\frac{x\,dx\,dy}{x^2+y^2}$*, gdzie:*
   - *a) D jest ograniczony przez krzywe* $x=2,y=x,x=2y$
   - *b) D jest ograniczony przez krzywe* $2y=x^2,y=x$

Zadanie 16.4. *Oblicz pole figury ograniczonej krzywymi:*

a) $xy=4,x+y=5$ *b)* $y=e^x,y=e^{2x},x=1$

c) $y=2^x,y=2^{-2x},y=4$ *d)* $x+y=1,x+3y=1,y=x,2y=x$

Zadanie 16.5. *Oblicz za pomocą całki podwójnej objętość bryły ograniczonej powierzchniami:*

a) $x=1,x=0,y=1,y=0,x+y+z=4,z=0$ *b)* $x=\pm1,y=\pm2,z=6-x^2-y^2$

c) $y=x^2,y=1,x+y+z=4,z=0$ *d)* $z=\frac{x^2}{4}+y^2,x=\pm1,y=\pm1$

Zadanie 16.6. *Oblicz całki potrójne, gdzie D jest obszarem całkowania:*

1. $\int\int\int_D \frac{dx\,dy\,dz}{1-x-y}$, *gdzie:*

   a) *D jest ograniczony przez krzywe* $x = 0, x = 1, y = 2, y = 5, z = 2, z = 4$

   b) *D jest ograniczony przez krzywe* $x + y + z = 1, x = 0, y = 0, z = 0$

2. $\int\int\int_D \frac{dx\,dy\,dz}{(x+y+z+1)^3}$, *gdzie:*

   a) *D jest ograniczony przez krzywe* $x + z = 3, y = 2, x = 0, y = 0, z = 0$

   b) *D jest ograniczony przez krzywe* $x = 0, x = 2, y = \pm 1, z = \pm 1$

Zadanie 16.7. *Oblicz za pomocą całki potrójnej objętość bryły ograniczonej powierzchniami:*

a) $x + y = 1, x + y = 2, y = 0, y = 1, z = 0, z = 3$

b) $y = x^2, y = 1, z = 0, z = 2$

c) $x^2 + y^2 = 9, z = 0, z = 5$

d) $x + y + z = 4, x = 3, y = 2, x = 0, y = 0, z = 0$

Wskazówki i odpowiedzi

Odp 16.1.

a) 26 *b)* $\frac{1}{3}$ *c)* $-11\frac{1}{5}$ *d)* 6π *e)* $\frac{1}{2}(e-1)$ *f)* $\frac{506}{15}$

g) $\frac{1}{110}$ *h)* 175 *i)* $\frac{1}{120}$ *j)* $\frac{1}{12}$ *k)* $\frac{40}{3}$ *l)* 30

Odp 16.2.

a) $\int_{-2}^{2}\int_{x^2}^{4} f(x,y)\, dy\, dx = \int_0^4 \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x,y)\, dx\, dy$

b) $\int_2^4 \int_y^4 f(x,y)\, dx\, dy = \int_2^4 \int_2^x f(x,y)\, dy\, dx$

c) $\int_1^3 \int_0^{2y} f(x,y)\, dx\, dy = \int_0^2 \int_1^3 f(x,y)\, dy\, dx + \int_2^6 \int_{\frac{x}{2}}^3 f(x,y)\, dy\, dx$

d) $\int_0^1 \int_x^{2-x^2} f(x,y)\, dy\, dx = \int_0^1 \int_0^y f(x,y)\, dx\, dy + \int_1^2 \int_0^{\sqrt{2-y}} f(x,y)\, dx\, dy$

e) $\int_{-2}^1 \int_{y^2}^4 f(x,y)\, dx\, dy = \int_0^1 \int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} f(x,y)\, dy\, dx + \int_1^4 \int_{-\sqrt{x}}^1 f(x,y)\, dy\, dx$

f) $\int_{-\sqrt{3}}^1 \int_{-\sqrt{4-x^2}}^0 f(x,y)\, dy\, dx =$
$= \int_{-1}^0 \int_{-\sqrt{3}}^1 f(x,y)\, dx\, dy + \int_{-\sqrt{3}}^{-1} \int_{-\sqrt{4-y^2}}^1 f(x,y)\, dx\, dy + \int_{-2}^{-\sqrt{3}} \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} f(x,y)\, dx\, dy$

Odp 16.3. *1a)* 9 *1b)* 32 *2a)* $\frac{1225}{4}$ *2b)* 0 *2c)* 90 *3a)* $2\left(\frac{\pi}{4} - \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2}\right)$ *3b)* $\ln 2$

Odp 16.4. *a)* $\frac{15}{2} - 4\ln 4$ *b)* $\frac{1}{2}e^2 - e + \frac{1}{2}$ *c)* $12 - \frac{9}{2\ln 2}$ *d)* $\frac{7}{120}$

Odp 16.5. *a)* 3 *b)* $\frac{104}{3}$ *c)* $\frac{68}{15}$ *d)* $\frac{5}{3}$

Odp 16.6. *1a)* $-10\ln\frac{5}{4}$ *1b)* $\frac{1}{2}$ *2a)* $\frac{3}{2}\ln 2 - \frac{1}{8}$ *2b)* $\frac{1}{2}\ln 5 - \frac{3}{2}\ln 3$

Odp 16.7. *a)* 6 *b)* $\frac{8}{3}$ *c)* 45π *d)* $\frac{55}{6}$

17 Równania różniczkowe zwyczajne

Zadanie 17.1. *Rozwiąż równania różniczkowe:*

a) $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 3x^4$, $y(0) = 0$

b) $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = ky$, $y(x_0) = y_0$

c) $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + 3x^2y^2 = 0$, $y(1) = \frac{1}{2}$

d) $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{x^2 + y^2}{xy}$

e) $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - y = 3e^{2x}$

f) $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \frac{2}{x}y = 3x^3$

Zadanie 17.2. *Liczba jąder izotopu dN, która ulega rozpadowi w bardzo krótkim przedziale czasu dt jest wprost proporcjonalna do pozostałej jeszcze liczby jąder i zależy od rodzaju izotopu, co charakteryzuje stała λ. Jest to prawo rozpadu: $dN = -\lambda N dt$. Wyznacz zależność $N(t)$ uwzględniając warunek początkowy $N(0) = N_0$.*

Zadanie 17.3. *Prędkość rozpadu pierwiastka promieniotwórczego o masie m w czasie t określona jest wzorem $\frac{dm}{dt} = -km$, gdzie $k > 0$ jest stałą rozpadu charakterystyczną dla danego pierwiastka niezależną od czasu.*

a) *Wyznacz zależność masy pierwiastka od czasu $m(t)$.*

b) *Znajdź czas połowicznego rozpadu pierwiastka o masie początkowej m_0 wiedząc, że czas połowicznego rozpadu jest okresem po upływie, którego rozpada się połowa pozostałej masy pierwiastka.*

c) *Polon $Po - 210$ ma okres połowicznego rozpadu równy 140 dni. Znajdź jego masę po 100 dniach, jeżeli jego masa początkowa wynosiła 200 g.*

d) *Okres połowicznego rozpadu promieniotwórczego węgla $C - 14$ wynosi 5730 lat. Oblicz, jaki procent masy wyjściowej tego pierwiastka pozostanie po 10000 latach.*

Zadanie 17.4. *Prędkość rozkładu cukru w roztworze wodnym pod wpływem katalicznego działania kwasu wyraża się zależnością $\frac{dx}{dt} = k(a - x)$, gdzie $x(t)$ oznacza ilość cukru, która ulega rozkładowi w czasie t, natomiast a jest początkową ilością cukru, stała k jest współczynnikiem proporcjonalności. Znajdź zależność ilości cukru od czasu $x(t)$.*

Zadanie 17.5. *Zgodnie z prawem Newtona szybkość stygnięcia ciała jest wprost proporcjonalna do różnicy temperatur ciała T w chwili t i temperatury otoczenia T_o, czyli $\frac{dT}{dt} = -k(T - T_o)$, gdzie $k > 0$ jest stałą niezależną od czasu.*

a) *Wyznacz zależność temperatury ciała od czasu $T(t)$.*

b) *Sztabkę złota rozgrzaną do 180 stopni zanurzono w cieczy o stałej temperaturze równej 60 stopni. W jednej minucie temperatura sztabki obniżyła się do 120 stopni. Po ilu minutach temperatura spadnie do 90 stopni?*

Zadanie 17.6. *Zbiornik zawiera* 500 *litrów* 10% *wodnego roztworu soli. Do zbiornika wlewa się* 20% *wodny roztwór soli z prędkością* 25 *l/min. Z taką samą prędkością powstała mieszanina jest wylewana ze zbiornika. Wyznacz ilość soli w zbiorniku w zależności od czasu. Przyjmij, że proces rozpuszczania soli w wodzie jest natychmiastowy.*

Wskazówki i odpowiedzi

Odp 17.1. $N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$

Odp 17.2. *a)* $m(t) = m_0 e^{-kt}$ *b)* $t_p = \frac{\ln 2}{k}$ *c)* $m(100) = 200 \cdot 2^{-\frac{5}{7}} \approx 121,9\ g$ *d)* $\approx 29,83\%$

Odp 17.3. $x(t) = a\left(1 - e^{-kt}\right)$

Odp 17.4. *a)* $T(t) = T_o + (T(0) - T_o)\, e^{-kt}$ *b)* $2\ min$

Odp 17.5. *Ilość soli (w litrach) w zbiorniku w chwili t opisuje się zależnością* $s(t) = 100\left(1 - \frac{1}{2}e^{-0,05t}\right)$.